A COORDENAÇÃO DE RACIOCÍNIOS EM ATIVIDADES DE TRIGONOMETRIA COM ALUNOS DO 11º ANO[1]

Miguel Silva

Escola Secundária Jorge Peixinho - Montijo - FCT/UNL- (UIED)

António Domingos

Departamento de Matemática da FCT/UNL- (UIED).

RESUMO

Este artigo relata-nos uma parte do trabalho de campo realizado no âmbito de uma investigação mais abrangente sobre a compreensão da complexidade do pensamento matemático em alunos do ensino não superior. Com o objetivo de compreender essa complexidade, torna-se imperativo conhecer quer os diferentes objetos matemáticos, quer as conexões que os alunos realizam entre as diferentes representações do mesmo objeto matemático. Para essa análise, utilizaram-se os conteúdos programáticos da unidade de trigonometria que é apresentada aos alunos do ensino secundário no início do décimo primeiro ano. De forma a sustentar esta análise, iremos considerar, primordialmente, a perspetiva cognitivista. Adicionalmente, traremos à discussão uma perspetiva semiótica que nos auxiliará a compreender os problemas que os diferentes sistemas e as diferentes representações podem trazer aos múltiplos raciocínios desenvolvidos pelo aluno na construção dos objetos matemáticos. A investigação seguiu uma metodologia qualitativa, sendo que os dados aqui apresentados resultam da conjugação dum processo de observação de aulas, com uma entrevista semiestruturada, na qual os alunos resolveram tarefas sobre trigonometria. Os resultados mostram diferentes raciocínios mas que se revelaram assentar sobretudo em imagens interiorizadas sobre um perspetiva operacional dos conceitos, verificando-se um fraco desempenho ao nível da objetificação.

PALAVRAS-CHAVE: Raciocínio, pensamento matemático, trigonometria.

INTRODUÇÃO

Vários autores defendem que uma aprendizagem significativa (Ausubel, 2003;Valadares & Moreira, 2009) envolve dois pressupostos. Por um lado, é necessário que os "inputs", e os artefactos (Radford, 2008, 2010), apresentados aos alunos ofereçam um potencial (Wertsch, 2007; Bussi & Mariotti, 2008) de criação de significado, por outro lado, é necessário que esse material cognitivo surja ordenado e coerente de uma forma capaz de se relacionar com a estrutura cognitiva prévia com que o aluno se apresenta à aprendizagem. Porém, o potencial tanto dos "inputs" como dos artefactos estão condicionados às ações desenvolvidas pelo aprendente. À descrição e compreensão dessas ações consideramos fundamental a coordenação de várias teorias

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

cognitivas bem como a abrangência sistémica e envolvência social que é concedida pela perspetiva semiótica.

PERSPETIVA COGNITIVISTA

No trabalho de Ed Dubinsky defende-se que os novos "inputs" a que o aprendente está sujeito, irão criar uma reorganização (Dubinsky, 1991) do seu sistema cognitivo, que lhe permitirá num processo de reequilíbrio estrutural, evoluir naquilo que o aprendente julga conhecer. Este processo de permanente reorganização provocado pelo conflito que os novos "inputs" vão criando ao longo da vida, está na base das ações realizadas pelo indivíduo e que surgem como parte fundamental da teoria APOS. Dubinsky defende que o conhecimento matemático é construído através de ações que se produzem sobre os objetos matemáticos já conhecidos, que depois de reorganizados são capsulados em novos objetos matemáticos, tal como ilustra a figura 1.

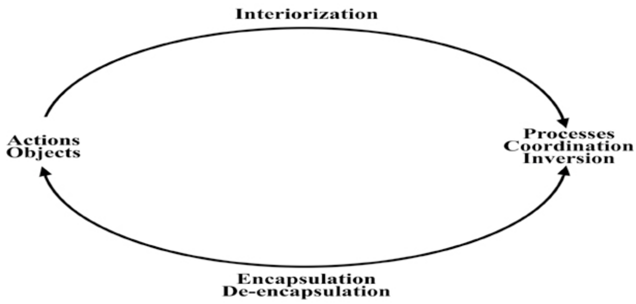

Figura 1- Esquema da teoria APOS -Action, Process, Object, Scheme(Dubinsky, 1991)

Partindo do trabalho de Piaget que considera existirem quatro catalisadores na construção do pensamento matemático resultantes de uma abstração reflexiva, interiorização, coordenação, capsulação, generalização, Dubinsky (1991) acrescenta-lhe um quinto fator, a reversão. Desta forma, apoiados na figura 1, podemos considerar que o indivíduo produz ações sobre objetos que através da interiorização se convertem em processos. Esses processos podem ser capsulados em novos objetos matemáticos. Mas a dinâmica deste sistema, pode ser revertida numa descapsulação do objeto, para que o mesmo se volte a capsular após uma coordenação de processos, o que o torna num objeto mais potente. Assim, as ações que os sujeitos aplicam sobre os objetos matemáticos são transformações que surgem como resposta a um estímulo exterior (tarefa, questão, exercício, definição…). Essas ações resultam em processos construídos pelo indivíduo, que se apropria da maneira como os realiza podendo descreve-los, desconstruí-los ou invertê-los. Ao dominar os processos, o sujeito consegue capsulá-los num novo objeto matemático. Toda esta dinâmica descrita na figura 1 traduz os "schemas" mentais do sujeito.

Por seu turno, Anna Sfard refere-se aos objetos matemáticos concebendo-os segundo duas perspectivas, que considera complementares. Os objetos matemáticos construídos segundo uma conceção estrutural (Sfard, 1991) são encarados como uma estrutura estática com uma dimensão real que existem num qualquer lugar espácio-temporal. Esta sua dimensão resultante da construção sob uma conceção estrutural, permite-nos trabalhar com a entidade matemática como um todo sem nos preocupar com pormenores e especificidades. Trata-se desta forma de uma entidade una, pronta, e agregadora. Por seu lado, os objetos matemáticos construídos com base numa conceção operacional (Sfard, 1991) são considerados como uma entidade potencialmente importante, que vai sendo criada e potencializada através de uma sequência de ações que a vão estruturando. Irá pois tratar-se de uma estrutura dinâmica, ativa, sequencial e particionável. Defendendo um processo evolutivo que nos leva dos objetos construídos segundo uma conceção operacional, aos objetos construídos sob uma conceção estrutural, esta autora considera que ambas as perspectivas são complementares (Sfard, 1991). Porém esta evolução da conceção operacional para uma conceção estrutural não se revela uma tarefa fácil, tão pouco automática. Nesta evolução são identificados três momentos sequenciais: *interiorização* onde são executadas ações e processos sobre um objeto familiar, mobilizando as características desse objeto e podendo modificar a ideia pré-construída sobre o mesmo; *condensação* onde os vários processos anteriores são comprimidos num todo, tornando-se assim em entidades mais manuseáveis; *reificação* onde foi criada a habilidade de ver esta nova entidade matemática como um objeto matemático permanente. Alcançada esta reificação do objeto matemático, o indivíduo é capaz de trabalhar o conceito tanto de uma forma operacional por compreender todos os processos específicos que o construíram, bem como toda a abrangência teórica que leva à generalização (Dreyfus, 1991) e abstração (Dubinsky, 1991) que o conceito envolve[2]. A reificação poderá ser encarada como uma alteração hermenêutica da conceção do conceito. Este caminho não sendo linear leva a que não seja percorrido com sucesso para todos os objetos matemáticos é por isso que Sfard afirma que [3]"muitas vezes os alunos surgem com grande destreza operacional mas que não compreendem conceitos por detrás da parte operacional" (Sfard, 1991, p. 32).

David Tall, assenta o seu trabalho numa perspetiva proceptual (Tall & Vinner, 1981; Tall, 1991; Gray & Tall, 1994) de conjugação entre conceitos e processo do pensamento matemático para uma teoria onde caracteriza três mundos matemáticos, (Tall, 2004) com crescente grau de sofisticação e complexidade. Esta noção evolutiva conduz-nos através dos diferentes mundos desde uma visão mais empirista até uma visão mais formal e axiomática dos constructos matemáticos.

O primeiro mundo surge da perceção do espaço que nos rodeia, e da reflexão que fazemos sobre esses objetos, quer sejam físicos ou mentais, construídos pelo indivíduo. Através da reflexão e de uma crescente riqueza de linguagem conseguimos construir noções matemáticas para além do mundo físico que percecionamos. Este primeiro mundo denominado de "mundo corpóreo- conceptual "[4] inclui objetos físicos e perceções mentais do imaginário espacial que o indivíduo possui, englobando os objetos matemáticos que apelem a uma noção visual ou de outros sentidos.

O segundo mundo é um mundo de símbolos que utilizamos sobretudo na aritmética, na álgebra e no cálculo. Tudo começa com ações (tais como apontar e contar) que estão capsuladas em conceitos pelo uso da simbologia, mudando o foco do *fazer* matemática para o *pensar* matemática. Este segundo mundo é designado de "proceptual-simbólico" ou "mundo proceptual"[5].

O terceiro mundo assenta nas propriedades expressas por axiomas ou através de definições formais de objetos como "anel", "corpo", etc. Este mundo é designado por "mundo formal ou axiomático"[6] e leva-nos a trabalhar, não com objetos e conclusões

---

2 Talvez faça sentido aqui esclarecer a utilização de duas palavras da mesma forma que Sfard o faz. A utilização da palavra conceito para quando se trata da "ideia matemática oficialmente aceite" e a palavra conceção, como a "ideia interna" construída sobre determinado conceito matemático.

3 No original: …it should not surprise us that ever so often students appear to be learning many mathematical skills at a rote manipulation level and do not understand the concepts underlying the computation…

4 No original: conceptual-embodied world

5 No original: proceptual-symbolic world

6 No original: axiomatic-formal world

feitas de experimentação, mas sim com axiomas e definições que são cuidadosamente expressas na linguagem matemática por forma a deixar claras as suas propriedades.

Nenhum destes autores defende que esta evolução se efetua de uma só vez e caminhando com linearidade. Quer a capsulação, quer a reificação, tão pouco a evolução entre os três mundos, nos deixam a ideia que se caminha para um produto finalizado. Numa estratégia de conexão entre as correntes cognitivas apresentadas, julga-se pertinente observar que estas, comummente, assentam numa progressão do conhecimento matemático através das ações sobre os objetos mais elementares, que através da reflexão, coordenação, condensação, evoluem por capsulação e/ou reificação para objetos matemáticos mais abstratos, e generalizáveis.

PERSPETIVA SEMIÓTICA

Inspirado numa corrente social-cultural Vygotskiana, fortemente marcada pela importância que Piaget atribui à ação sobre os objetos, o trabalho de Radford foca-se em aspetos específicos da aprendizagem como tomada de consciência e de construção do indivíduo bem como na importância da dimensão social da atividade matemática. Radford (2008), desenvolve uma teoria do conhecimento a que dá o nome de Teoria da Objetificação (TO) (Radford, 2010). A TO assenta no prossuposto da importância das dimensões antropológica e histórico-cultural na construção do conhecimento. Trata-se de uma teoria que tenta afastar a ideia de que a construção do conhecimento é um processo puramente individual atribuído relevo às influências sociais, históricas e culturais resultantes do percurso de vida dos indivíduos envolvidos. Trata-se por isso, de um processo reflexivo que cada indivíduo produz assente nas diferentes dimensões das suas vivências. Consequentemente, Radford desenvolve a TO assente num sistema Semiótico que visa a interação de três grandes eixos: primeiro - sistema semiótico de significância cultural (Radford, 2006), onde estão inseridos os objetos matemáticos, suas conceções, e relações com o mundo real; segundo - o território do pensamento baseado nos artefactos, e em terceiro - a atividade, ou seja que tipo de ações, operações e atividades realizamos com os objetos. O processo de aprendizagem defendido nesta teoria passa de uma perceção material do objeto para um estado de generalização, que lhe permite intuir resultados que não estão ao alcance sensorial. O processo começa com uma objetificação, que através da ação e reflexão dá corpo aos diferentes raciocínios matemáticos. Esta objetificação recorre a uma série de artefactos (gestos, linguagem, gráficos, etc.) que apesar de "serem bastante materiais", se tornam, desta forma, estruturantes do pensamento abstrato. Não sendo a generalização algébrica uma ação natural do aluno, esta surge em consequência da capacidade de síntese, construção de esboços, coordenação de diferenças entre iguais e similitudes entre diferentes resultante de crenças, conceções e ações eminentemente empíricas promovidas sobre o objeto.

Por seu turno Raymond Duval apresenta-nos uma abordagem Semiótica assente na perspetivas de que os objetos matemáticos sendo à *priori* inacessíveis, surgem apenas perante nós através dos seus representantes (signos) sendo que as conexões entre as suas várias representações são sustentados por um conjunto de operações de *tratamento* e *conversão* (Duval, 2006). Desta forma, Duval defende um sistema semiótico caracterizado por um conjunto de regras, de sinais elementares e uma estrutura de significados decorrentes da relação entre os signos dentro do sistema. Assim sendo, os objetos matemáticos são encarados como entidades invariantes que conectam os diferentes sistemas semióticos à medida que se vão realizando operações de tratamento e conversão, entendendo-se a cognição matemática como o produto da coordenação dos diferentes sistemas semióticos. Consequentemente, a essência da cognição é enriquecida pela fluente coordenação dos vários sistemas semióticos.

Segundo a perspetiva de Duval (2006), todo o desenvolvimento matemático bem como a sua aprendizagem é resultante das interações entre os sistemas semióticos. Consequentemente, o signo ganha um duplo sentido: 1) estrutura semiótica e 2) representante do objeto. Desta forma, a construção de sentido e a aprendizagem requerem que sejam manipulados diferentes signos em diferentes sistemas semióticos sem nunca perder a noção do objeto matemático por eles representado e que estamos a estudar. Duval alerta-nos para o comum perigo da confusão entre o signo e o objeto matemático por si representado. Esta relação sinal/objeto ganha sentido através da semiótica. A esta abordagem chamamos estrutural/funcional, passando a atividade matemática a ser caracterizada pela transformação dos sinais no complexo sistema semiótico. Essas transformações concorrem para a construção de significados e advêm das reflexões estabelecidas entre o signo e a entidade por si representada nos diferentes sistemas semióticos.

Estas duas visões semióticas surgem aqui no sentido de enriquecer a caracterização dos raciocínios construídos pelos alunos. Apesar das diferenças entre as duas correntes apresentadas, ambas dão ênfase ao papel representativo do signo como meio semiótico, funcionando como mediador e coordenador entre sistemas. Para além disso, sendo a perspetiva cognitiva mais fina e específica dos contextos matemáticos, é a perspetiva semiótica que nos traz quer as dimensões social, cultural e antropológica, quer toda a influência que os vários sistemas de representação têm na construção do conhecimento matemático.

METODOLOGIA

Neste estudo foi utilizada uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa (Bogdan & Biklen, 2006; Lassard-Hérbert, Goyette, & Boutim, 2008). A recolha de dados foi realizada em duas fases que a dada altura decorreram em simultâneo. Na primeira fase, o investigador acompanhou uma turma de secundário durante dois anos letivos (11º e 12º ano), numa escola do Distrito de Setúbal. Numa segunda fase, foram elaboradas e levadas a cabo entrevistas semiestruturadas, tendo estas sido registadas em áudio e vídeo e posteriormente transcritas. Os dados que iremos apresentar resultam de episódios de duas dessas entrevistas, nas quais os alunos resolveram tarefas sobre trigonometria. Para melhor compreender as ações que os alunos desenvolviam perante as tarefas, utilizou-se uma estratégia de "thinking aloud" (Someren, Barnard, & Barnard, 1994) onde os alunos iam explicando a razão das suas tomadas de decisão e justificando a razoabilidade das relações que iam invocando. Foi explicado aos entrevistados que não se faria qualquer juízo de valor avaliativo com estes dados, contribuindo assim para uma maior fiabilidade da explicitação dos seus raciocínios. Outra opção metodológica, que se verificou importante, foi o facto de se ter optado por, em momentos de manifesto impasse, revelar progressiva e parcialmente algumas das propostas de resolução. Esta opção, permitiu, que nos momentos em que os alunos não conseguiam resolver o problema com os objetos matemáticos que dominavam, tentar compreender se os raciocínios que lhe eram apresentados eram passiveis de serem descapsulados e revertidos por eles.

CONTEXTO EDUCATIVO

A tarefa (figura 2) é eminentemente prática, envolve algum grau de abstração e é complementar a outras que surgiram na entrevista.

Existindo várias propostas de resolução, a equação irá exigir um tratamento quer aritmético quer algébrico, sendo expectável que surja, por ser norma (Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992) de sala de aula, uma representação geométrica e até mesmo gráfica. Espera-se por isso que o conceito imagem assuma um papel importante nos raciocínios dos alunos (Vinner, 1991).

Em relação à forma como esta temática foi abordada em aula, poderemos dizer que se tratou sobretudo de uma abordagem estrutural (Sfard, 1991). Relativamente às relações trigonométricas a professora foi deduzindo cada uma delas pela manipulação do círculo trigonométrico que permitisse capsular os objetos matemáticos pretendidos. Por outro lado, na resolução das equações trigonométricas, foi dada pouca importância ao valor do número real que surgia no segundo membro, justificando-se que a periodicidade se encarregaria de que para esse mesmo número a equação tivesse várias (periódicas) soluções.

ANÁLISE DE DADOS

A tarefa surge como a quinta tarefa das oito realizadas durante a entrevista semiestruturada, e apresenta-se assim enunciada:

Resolva a seguinte equação trigonométrica

$$\sin\alpha = \cos\frac{\alpha}{3}$$

Figura 2 - A Equação- Quinta Tarefa

Apresentam-se de seguida o desempenho de dois alunos da turma na resolução da tarefa, procurando identificar os raciocínios envolvidos. As primeiras reações face à atividade foram, de algum desconforto, pois os alunos reconhecem que já trabalharam com equações trigonométricas, "*mas não destas*"

João Sebastião (JS) admite rapidamente esta dificuldade

> **JS:** O primeiro problema é conseguir…passar esta equação para uma equação – digamos assim – viável de ser resolvida, porque isto não… supostamente não estaria na forma, … não está na forma em que depois vai ser resolvida…

Maria Luísa (ML), apesar de perante a resolução justificar todas as passagens, numa primeira fase não consegue resolver a equação e argumenta:

ML: Nestas equações eu estava habituada a ter um número… ou uma coisa…outra coisa qualquer… um número! Um valor! E a partir daí é que igualava… Sim, mas faz sentido, completamente…

Nesta fase os alunos reconhecem que já trabalharam estes conteúdos, separadamente, mas não conseguem estabelecer qualquer tipo de relação entre eles. Outra constatação que podemos inferir dos diálogos acima reside na dificuldade em identificar que ações devem desenvolver, o que pode sugerir uma compartimentação do conhecimento, sendo que essa dificuldade não é identificada em aula pela própria dinâmica da professora que lidera o caminho a seguir.

Se na primeira fase, existe um consenso quase unanime sobre o facto de ser necessário que os dois membros da equação surjam com a mesma função, numa segunda fase os alunos sentem a necessidade de objetificar o problema, optando por fazer uma tentativa de esboço da sua representação quer de forma gráfica quer geométrica. A manipulação simbólica dos termos da equação recorre às imagens mentais que os alunos interiorizaram durante o processo de ensino, procurando que estas promovam a resolução do problema. Radford designa esta utilização destas representações (tais como gestos, esboços, desenhos, palavras, gráficos, símbolos matemáticos) por atividade semiótica. Atuando desta forma o aluno tenta criar uma ponte entre algo que numa primeira fase surge apenas da perceção e que só se torna manipulável quando é objetificado.

Atentemos a partir de agora à forma como dois dos entrevistados procuram objetificar o problema em questão:

João Sebastião tenta objetivar o problema com o auxílio do círculo trigonométrico, começando por fazer um pequeno esboço.

[…]

JS: Rabiscar. Vamos lá rabiscar. Então…comecemos pelos ângulos…se calhar com o círculo trigonométrico dá para visualizar melhor. Então eles pedem o cosseno de alpha sobre três. Ora o cosseno de alpha sobre três… é o cosseno deste ângulo [aponta com a caneta para o papel], então…pronto… se o alpha for…vamos considerar…se o alpha for por exemplo um ângulo genérico [representa um ângulo genérico no primeiro quadrante do círculo trigonométrico que esboçou] … o alpha sobre três vai ser – isto está um pouco mal feito mas… [referindo-se ao seu desenho, figura 3] vai ser este. Este é o alpha sobre três. Ok, então… o que é que nós podemos fazer? [pergunta-se JS] ...

I: Repara, de um lado tens seno, do outro tens cosseno. É isso que te está a atrapalhar ou é apenas o facto do argumento ser diferente?

JS: Não, o que me está a atrapalhar é não conseguir…não conseguir conciliar as duas coisas. Sim, o facto do argumento ser diferente… porque eu sei que isto há… vai haver alguma coisa aqui que vai ter que mexer.

I: Mexer? Mexer no argumento ou na função?

JS: Hum… talvez mexer no … mexer no argumento [dito sem confiança] Depois logo se vê se se mexe na equação, mas… primeiro acho que se deve mexer no argumento… cosseno de alpha sobre três [relê parcialmente o enunciado] … aquilo é que me está a… porque eu sei que …ah, já sei! Eu vou ter que passar isto [cosseno de alpha sobre três] e eu tenho que perceber quando é que o cosseno de alpha… quando é que cosseno de alpha sobre três… qual é o cosseno de alpha sobre três...

Então cosseno de alpha… o cosseno de alpha sobre três… então, o cosseno de alpha sobre três… este alpha [completa o esboço, figura 3]… vai ser…vai ser…. Cosseno de alpha, vamos cá ver!

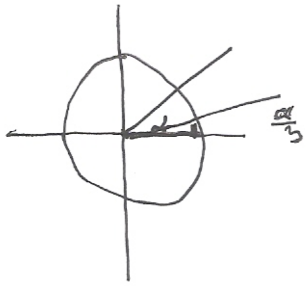

Figura 3- Esboço representativo da tarefa do JS

Nesta tentativa de objetificar o problema podemos observar um constrangimento que decorre da dificuldade de conciliação entre, o conceito imagem que JS apresenta e as funções trigonométricas apresentadas na equação. Note-se que a preocupação em representar o ângulo no círculo trigonométrico leva-o a descurar o papel que as funções (seno e cosseno) assumem no problema. Podemos constatar que na representação do problema no círculo apenas surgem os ângulos, não emergindo os segmentos que representam as medidas dos ângulos segundo as funções seno e cosseno. Depois de vários momentos de impasse é-lhe apresentada uma proposta de resolução.

JS: Ok, então vamos lá ver. Então aqui diz que: seno de alpha é igual a cosseno de alpha sobre três, o que equivale a dizer que seno de alpha é igual ao seno de pi sobre dois menos alpha terços…

I: Repara, o que é que aconteceu aí?

JS: O que é que aconteceu aqui? De facto, passou-se de um cosseno para um seno, mas este seno [aponta para o segundo membro da linha dois da proposta] vai ter que ser igual a este cosseno [segundo membro da linha um da proposta] … e portanto este ângulo aqui [argumento do segundo membro da segunda linha da proposta de resolução] … o que fizeram foi o que eu estava a pensar fazer… que era no círculo trigonométrico, embora eu não consegui visualizar…porque… posso escrever aqui?

Linha 1	$\sin\alpha = \cos\frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow$
Linha 2	$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) \Leftrightarrow$
Linha 3	$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{3} + 2k\pi \ \vee\ \alpha = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{3} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

Figura 4- primeiras três linhas da proposta de resolução

JS: Se eu tenho ambos os membros com seno, então seria… seria… então, se eu tenho ambos os membros com seno, eu posso passar este [apontando para o seno que está no primeiro membro da segunda linha] … não posso? Posso! Posso passar este seno para aqui [fazendo o gesto de quem o quer retirar do primeiro membro, para o colocar como denominador do segundo membro]

I: A dividir??!!

JS: Sim… Não. Só fazendo seno de menos um …mas… seno de menos um de seno…

I: … seno de menos um de seno? Qual é o sentido?

JS: Nenhum.

Tendo em conta a não interiorização do processo de converter o cosseno em seno, JS não conseguindo avançar com qualquer tratamento, tenta uma manipulação algébrica desprovida de sentido matemático ignorando a função e tentando isolar o alpha. Apesar disso, e à medida que os passos da proposta de resolução vão sendo revelados, consegue identificar e justificar algebricamente todos eles mas não conseguindo antecipar-se aos mesmos. Segundo Duval o aluno consegue identificar os diferentes tratamentos algébricos da proposta de resolução. Porém a dificuldade na sua manipulação pode ser interpretado por dificuldades na interiorização (Sfard, 1992).

[…]

JS: Pronto, bem me parecia. Já percebi. Como seno de menos um é igual a seno pi mais…Pois, como seno de alpha é igual a seno de pi meios menos alpha terços, então este ângulo alpha terá de ter amplitude igual ao deste ângulo [apontando para o argumento do segundo membro da segunda linha da tentativa de resolução].

Constata-se que existe aqui dificuldade na compreensão do tratamento efetuado uma vez que JS não consegue realizar ações com aqueles objetos elementares.

I: Exatamente!

JS: Pronto, então o que é que fizeram? Tiraram os senos… ou seja como só precisavam deste ângulo… e disseram que alpha é igual a pi sobre dois menos alpha terços mais dois kapa pi. Porquê? Porque como se pode mostrar no círculo trigonométrico não é só este ângulo [aponta para o argumento: pi sobre dois menos alpha terços]. Se nós andarmos dois pi, [utiliza agora o esboço que construiu do círculo trigonométrico] vamos ter ao mesmo…ao mesmo lugar e portanto vai ser um ângulo com a mesma amplitude. Ou então, o que é que eles fizeram também? Disseram que o alpha é igual a pi menos pi meios mais alpha terços… que seria isto [volta ao esboço do círculo, para visualizar aquilo que a simbologia matemática não ajudou a clarificar]. Que seria isto… pi, não…pi menos…Ah, pois, porque seria… seria um ângulo simétrico em relação ao eixo das ordenadas [o ângulo não é simétrico, apenas a sua representação] e portanto o seno seria igual. E poder-se-ia considerar, também, que este alpha era igual.

Para além de algumas imprecisões linguísticas entre o ângulo e a sua representação no círculo, verifica-se um desajuste entre representações do mesmo objeto em sistemas semióticos diferentes. Este problema persiste desde os primeiros instantes e reside na deficiente conversão da representação algébrica para a representação geométrica evidenciada no círculo trigonométrico que construiu. Essa dificuldade mais claramente fica demonstrada quando, após ter observado a proposta de resolução e ter justificado algebricamente a validade de todos os passos se verifica ainda a dissonância criada na objetificação do problema.

JS: " A" dificuldade era conseguir lembrar-me de como é que se… como é que se passa deste cosseno de alpha sobre três, para depois o seno. Se bem que eu ainda não consegui – deixe lá ver - seno de pi meios menos o alpha terços… eu ainda não consegui perceber qual é este ângulo aqui.

I: Esse é um ângulo genérico. Tu começaste por dizer: " vou marcar um ângulo alpha genérico"…

[…]

JS: sim, mas o meu principal problema foi conseguir arranjar um ângulo em que o seu seno fosse igual ao seno de alpha.

I:Ou seja, tu querias exatamente visualizar o ângulo?

JS apesar de conseguir explicar os passos posteriores, ficou sem perceber a passagem da primeira para a segunda linha da proposta de resolução. JS quando não visualiza o objeto, mentalmente ou no papel, não consegue libertar-se do facto da figura que utilizou para objetificar o problema não ser conciliável com os conceitos imagem que apresenta sobre esta temática. Desta forma, não se conseguiu abstrair da figura que criou mantendo-se numa perspetiva particular. Apesar de ter afirmado que estava a representar um ângulo genérico a sua representação no primeiro quadrante particularizou e dificultou a compreensão da resolução apresentada.

JS: Não, não queria exatamente visualizar. O que eu queria era conseguir… pois, se calhar era isso, conseguir visualizar… não apenas no círculo trigonométrico…era conseguir visualizar mentalmente… conseguir perceber um ângulo que fosse igual a… que tivesse um cosseno igual a este [aponta para o argumento do segundo membro do enunciado] tivesse um seno igual a este [aponta para o argumento do segundo membro do enunciado] … mas acho que isso é possível [começa a esboçar um outro círculo trigonométrico] … agora que estou a pensar bem nisso, e se considerarmos o alpha terços… pois claro! Já percebi. Porquê? Porque, esse cosseno de alpha terços,…vai ser igual a … pois, ao pi menos alpha terços… pois obviamente, ao seno de pi menos alpha terços. Era isto que me estava a faltar.

Em resumo, JS constrói um raciocínio baseado nas imagens que tem relativas ao conceito. As imagens que JS utiliza não fazem transparecer a relação entre as funções que aprecem na equação. A tentativa de relacionar os dois membros da equação surge apenas ao nível dos argumentos da função e não entre as próprias funções. Este fator torna-se fulcral na dificuldade que JS revela desde o primeiro momento. A representação no círculo proporciona uma visualização dos argumentos, mas a integração das respetivas funções obedece a um outro grau de complexidade. Utilizando a teoria APOS, conseguimos perceber que JS interiorizou um conjunto de imagens do conceito e que raciocina com base na tentativa de as coordenar. Porém, neste caso específico, não revela ser capaz de as conjugar, criando incompatibilidades dentro do seu próprio raciocínio. A objetificação (representação geométrica do círculo) que utiliza para exteriorizar o seu raciocínio, entra em conflito com a manipulação algébrica que consegue identificar e até mesmo justificar a partir da altura que toma contacto com a proposta de resolução. Sendo que podemos considerar que os conceitos imagens se tornaram as ferramentas da objetifcação e consequentemente alicerces do seu raciocínio todas essas imagens terão de se coordenar para a criação (capsular) do objeto matemático. Esta não conciliação entre as imagens impede uma conversão entre sistemas semióticos que segundo Duval irá representar um entrave na aprendizagem matemática e à criação dos constructos matemáticos

Por outro lado se considerarmos a teoria da reificação João Sebastião apresenta um conjunto de imagens interiorizadas mas que não evoluem para um nível de condensação que as torne mais harmoniosas e manuseáveis. Não podemos deixar de referir a importância que a Reversão de Dubinsky teve no processo de construção da compreensão dos diferentes passos da proposta de resolução. Apesar de identificar as manipulações realizadas a partir do segundo passo da proposta da resolução, a assunção da compreensão apenas ocorre quando percorre a proposta de resolução partindo do fim (solução da equação) e realizando o trajeto em sentido inverso. Recorde-se que a Reversão apresentada por Dubinsky parte da ideia de percorrer o caminho contrário, permitindo ao sujeito, refletir sobre uma perspetiva diferente sobre aquele ou aqueles objetos matemáticos por si erigidos. Este tipo de análise que conjuga as perspectivas construtivistas e semióticas ajuda-nos a descrever os raciocínios dos intervenientes compreendendo que tipo de imagens são privilegiadas.

Por seu turno Maria Luísa também começa por tentar objetificar o problema começando por esboçar um círculo trigonométrico, mas rapidamente percebe que não representa a equação apresentada. A objetificação que criou é elementar não sendo suficiente para compreender o conceito. O conceito imagem que interiorizou não é coordenável com a equação apresentada. Por isso, tenta encontrar uma imagem algébrica (ferramenta algébrica).

> **ML:** … vou começar por pôr isto [no primeiro membro, onde surge seno] em cosseno
>
> […]
>
> **I:** Porque é que queres transformar o cosseno em seno?
>
> **ML:** Para ter cosseno dos dois lados [membros]
>
> **I:**… a mesma função em ambos os membros, é isso?
>
> **ML:** Sim, sim…
>
> **I:** …é uma preocupação que vocês têm quando estão a resolver este tipo de equações?
>
> **ML:** Foi a primeira coisa em que pensei, não sei… então, sei que… o seno é igual a este...agora tenho que ir buscar…acho que meti isto mal… vou fazer outra representação.
>
> […]
>
> **I:** Essa fórmula de conversão dos senos para os cossenos… usas sempre a mesma, ou é conforme…
>
> **M:**Uso sempre a mesma… acho que sim… e agora? Pois, agora não vejo outra forma…

A primeira ação que tenta realizar é conjugar as duas funções, tentado que surja em ambos os membros a mesma função. Porém, como não consegue efetivar a sua ideia, depois de algum impasse, ML começa por esboçar outro raciocínio. Desta vez assente na imagem da resolução de equações, que a fez deixar o segundo membro com o valor zero. Este raciocínio assentava na ideia de ter um número num dos membros, tendo as funções trigonométricas no outro. O raciocínio fica alicerçado nos tratamentos que é capaz de fazer às imagens que associa ao conceito e à resolução algébrica de determinadas equações.

> **ML:** Vou passar tudo para o mesmo membro a ver se resolvo…
>
> **I:** Qual é a ideia de passar para o outro membro?
>
> **ML:** Vou ficar aqui com zero [no segundo membro], vou ver se consigo alguma coisa

Apesar desta nova tentativa de manipulação algébrica das imagens, ML volta a um impasse. Consequentemente começam por lhe ser reveladas as várias etapas de proposta de resolução que ela consegue justificar e até mesmo antecipar-se nalguns casos.

> […]
>
> **ML:**… e ficava com a solução… pronto! Sim percebi…[…] Eu acho que não ia pensar nisso, não pensava em igualar ao alpha com este, $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{3}\right)$ porque eu nestas equações estava habituada a ter um número no segundo membro… ou uma coisa…outra coisa qualquer… um número! Um valor! E a partir daí é que igualava
>
> **I:** Então mas…
>
> **ML:** Sim, mas faz sentido, completamente…

A Maria Luísa apresenta uma valorização das imagens algébricas e dos raciocínios que assentam em dois tipos de tratamentos: aritmético e algébrico-simbólico. Conseguimos perceber a valorização que a aluna atribui às imagens que interiorizou pela invocação que lhes faz. Para além disso, ML consegue justificar as manipulações simbólicas com propriedades das funções trigonométricas como a periodicidade porém, não consegue resolver a equação pelo facto desta não se apresentar na forma que está habituada. A generalização torna-se inacessível porque os objetos que costuma manipular são todos mais próximos do domínio do corpóreo e elementares como por exemplo os números. O raciocínio apresenta dificuldades de desenvolvimento quando é necessário fazer essa manipulação algébrica com objetos genéricos e generalizáveis como é o caso dos argumentos da equação.

CONCLUSÕES

Pela análise dos dados da entrevista conseguimos compreender as ações que estes alunos realizaram e as dificuldades que foram sentindo. Ambos os alunos, desde o primeiro momento, admitem qua a equação não está na forma que estão habituados a trabalhar. Apesar de identificarem o que é necessário fazer algebricamente para tratar a equação, acabam por não o conseguir fazer.

Consequentemente, JS tenta objetificar o problema esboçando uma representação dos ângulos no círculo trigonométrico, sem considerar as funções que lhe estão associadas. Tal facto revelou-se problemático, pois as imagens dos tratamentos algébricos com que justificou os diferentes passos da proposta de resolução tornaram-se para JS incompatíveis com a imagem da representação dos argumentos no círculo.

Por seu turno, ML assenta sobretudo o seu raciocínio nas imagens dos tratamentos algébricos que interiorizou e que considera válidos para equações trigonométricas.

Tanto o JS como a ML apresentam dificuldades com o surgimento da função seno no segundo membro. Este entrave à objetificação do problema e ao consequente desenvolvimento do raciocínio de ambos advém do facto de apesar de terem interiorizado um conjunto de imagens que não conseguem coordenar (Dubinsky, 1991) com vista à construção de novos objetos. Desta forma poderemos caracterizar estas imagens criadas segundo uma perspetiva operacional (Sfard, 1991) logo circunstancial, o que não permite uma realização de processos que possam ser capsulados (Dubinsky, 1991) em novos objetos. Também se torna evidente que a relação entre os dois sistemas semióticos aparece aqui como um entrave à resolução algébrica. Surge aqui a ideia de que, a não apropriação dos vários sistemas semióticos torna a conversão (Duval, 2006) complexa, inibindo desta forma que se desenvolvam raciocínios que favoreçam a resolução da tarefa proposta.

BIBLIOGRAFIA

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e Retenção de Conhecimento: Uma Perspectiva Cognitiva.* Lisboa: Plátano Editora.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2006). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria dos Métodos.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, *Handbook of International research in Mathematics* (pp. 746-783). New York: Routledge.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal 29(3)* , 573-604.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In T. David, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academics.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academics.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. In L. Radford, & B. D'Amore, *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático* (pp. 45-81).

Gray, E. M., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26* , 115–141.

Lassard-Hérbert, M., Goyette, G., & Boutim, G. (2008). *Investigação Qualitativa:fundamentos e práticas* (3ª ed.). Lisboa: Instituto Piaget.

Radford, L. (2006). Semiótica y Educación Matemática. In L. Radford, & B. D'Amore, *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático* (pp. 7-22). Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing:Toward a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger, *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History and Culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics 30* .

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* , 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical object and the quandary of reification - The case of function. In E. Dubinsky, & G. Harel, *The concept of function* (pp. 59-84). Washington: Mathematical Association of America.

Someren, M., Barnard, Y., & Barnard, J. (1994). *The Think Aloud Method: A practical guide to modelling cognitive processes.* London: Academic Press.

Tall, D. (2004). *Introducing Three Worlds of Mathematics.* Retrieved 2010 йил 19-Agosto from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academics.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 281–288). Bergen, Norway.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In *Educational Studies in Mathematics 12* (pp. 151-169).

Valadares, J., & Moreira, M. (2009). *A Teoria da Aprendizagem Significativa: sua fundamentação e implementação.* Coimbra, Portugal: Almedina.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, *Advanced Matehmatical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic.

Wertsch, J. V. (2007). Mediation. In H. Daniels, M. Cole, & J. V. Wertsch, *The Cambridge Companion to Vygotsky* (pp. 178-192). Cambridge University Press.

ANEXOS

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Questão5:

Resolva a seguinte equação trigonométrica

$$\sin\alpha = \cos\frac{\alpha}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{3} + 2k\pi \ \vee \ \alpha = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{3} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ \alpha - \frac{\alpha}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\alpha}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ \frac{2\alpha}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$8\alpha = 3\pi + 12k\pi \ \vee \ 4\alpha = 3\pi + 12k\pi, k\epsilon\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2}k\pi \ \vee \ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi, k\epsilon\mathbb{Z} \blacksquare$$