PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM ALUNOS DO 9.º ANO: GENERALIZAÇÃO EM NÚMEROS REAIS E INEQUAÇÕES[1]

Joana Mata-Pereira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
joanamatapereira@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo. Nesta comunicação apresentamos uma investigação que procura estudar os processos de raciocínio de alunos do 9.º ano na resolução de tarefas envolvendo números reais e inequações, em especial no que respeita à generalização, enquanto processo-chave do raciocínio matemático, bem como com a sua relação com as representações e os processos de significação. A metodologia é qualitativa e interpretativa, na modalidade de observação participante. Analisamos os processos de raciocínio de cinco alunos com base na observação de sala de aula (com videogravação) e na análise documental. Os resultados mostram que, na formulação de generalizações, em grande parte das situações, os alunos seguem um raciocínio de natureza indutiva, mas também se verificam situações que envolvem raciocínios abdutivos ou generalizações de cunho mais dedutivo. Os resultados mostram ainda que os processos de raciocínio se encontram estreitamente relacionados com a significação e que o uso de diversas representações não parece limitar os processos de raciocínio dos alunos.

Palavras-chave: Raciocínio, Generalização, Representações, Significação, Números reais, Inequações.

Introdução

Um dos principais objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade dos alunos raciocinarem matematicamente. A aprendizagem de conceitos, algoritmos e procedimentos rotineiros, baseada na memorização, é insuficiente para levar os alunos a desenvolver a capacidade de raciocinar e a ver a Matemática como uma disciplina lógica e coerente (ME, 2007). O próprio desenvolvimento do raciocínio matemático é necessário para que os alunos alcancem uma compreensão efetiva dos procedimentos, sendo capazes de os usar com segurança, de interpretar corretamente os seus resultados e de compreender porque funcionam (NCTM, 2007, 2009).

O raciocínio matemático ocorre em todos os temas, desta disciplina. Neste artigo focamos o tema da Álgebra, mais especificamente o trabalho com números reais e inequações. Assim, o nosso objetivo é analisar os processos de raciocínio de alunos do 9.º ano na resolução de tarefas e problemas algébricos envolvendo estes tópicos e compreender de que modo os processos de raciocínio se relacionam com as representações utilizadas e com os significados que os alunos dão aos conceitos envolvidos. Esperamos que os resultados obtidos possam ajudar os professores no seu trabalho na sala de aula, tendo em vista promover o raciocínio dos alunos.

---

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Raciocínio matemático

Raciocinar é fazer inferências, ou seja, usar a informação existente para chegar a novas conclusões. É o que diz Oliveira (2008), que descreve o raciocínio matemático como "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). Situando-se numa perspetiva dedutiva, Aliseda (2003), identifica o raciocínio matemático com a inferência lógica, em que existe uma relação necessária e irrefutável entre premissas e conclusão. Outros autores, como Rivera e Becker (2009), alargam o raciocínio matemático ao campo indutivo, em que se formulam generalizações a partir da identificação de características comuns a diversos casos, bem como ao campo abdutivo, em que se formulam generalizações estabelecendo relações entre diversos aspetos de certa situação. Também Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram que o raciocínio matemático é "um processo dinâmico de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (p. 10). Dependendo da ênfase dada a este ou aquele aspeto, o que um autor entende como fundamental do raciocínio, pode não o ser por outro. Deste modo, raciocinar matematicamente pode dizer respeito tanto a aspetos lógicos como a processos intuitivos, incluindo a formulação de novas ideias e a validação de novas conclusões.

O raciocínio matemático surge enquanto capacidade transversal no atual programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007), incluindo uma variedade de processos, nomeadamente a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas e a realização de justificações. Ao estabelecer conjeturas, os alunos identificam pontos comuns entre vários casos, expressando ideias que os levam a usar e clarificar o significado de conceitos, símbolos e representações. A generalização, enquanto conjetura com características particulares, tem um papel essencial na compreensão da Matemática pois este processo de raciocínio é uma das bases da construção desta ciência. Formular uma generalização matemática envolve fazer uma afirmação sobre uma propriedade, conceito ou procedimento que se pretende válido para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas. Em Matemática, uma generalização é considerada válida apenas se for demonstrada. No entanto, no âmbito da Educação Matemática, uma generalização deve ser considerada válida de acordo com as capacidades e conhecimentos dos alunos em cada momento da sua aprendizagem (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008).

Becker e Rivera (2005) defendem que em situações do dia-a-dia, os alunos estão naturalmente predispostos a realizar generalizações. Contudo, é amplamente reconhecido que, para muitos alunos, generalizar é uma tarefa desafiante (Zazkis, Liljedahl, & Chernoff, 2008). Particularmente, Becker e Rivera (2005) num estudo com alunos do 9.º ano na realização de tarefas envolvendo sequências lineares, salientam que, por vezes, estes não conseguem realizar generalizações por não mostrarem flexibilidade no uso de conexões entre várias formas de representação e estratégias. Isto sugere que, mesmo que os alunos tenham apetência para a formulação de generalizações, o trabalho continuado neste tipo de processos é necessário para que desenvolvam estratégias que levem à formulação de generalizações válidas e adequadas à situação em questão. Carraher et al. (2008) consideram que, no ensino básico, para que os alunos formulem generalizações, é importante que as tarefas estejam associadas a situações exploratórias que envolvam ou suscitem a criação de casos particulares com características passíveis de generalizar a um conjunto mais alargado de dados.

Ao longo do percurso escolar dos alunos, é necessário que seja promovida e compreendida a transição entre as generalizações baseadas maioritariamente em observações empíricas e casos particulares e as generalizações baseadas essencialmente na coerência lógica (Carraher et al., 2008). No que respeita a generalizações baseadas em observações empíricas ou casos particulares, Radford (2003) distingue entre generalizações factuais e contextuais. A generalização factual surge quando a observação empírica ou casos particulares são diretamente aplicados a novos casos particulares, sem que se altere o conjunto de objetos matemáticos em causa. A generalização contextual, igualmente baseada em observação empírica ou casos particulares, pressupõe um alargamento a um novo conjunto de objetos matemáticos. O autor identifica ainda a generalização simbólica, não necessariamente associada a observações empíricas e que envolve na sua formulação a compreensão e utilização da linguagem algébrica. Assim, e particularmente em Álgebra, os alunos devem primeiro aprender a formular generalizações em tarefas nas quais têm a possibilidade de observar padrões e relações. Numa segunda fase, devem formular generalizações utilizando a notação algébrica para, posteriormente, numa última fase, poderem obter novas informações ao refletirem sobre as expressões algébricas produzidas pelos próprios ou por outros (Carraher et al., 2008). Kieran (2007) defende que é importante promover a formulação de generalizações nestas diversas fases pois grande parte da compreensão dos conceitos, propriedades e procedimentos algébricos advém das atividades de generalização em Álgebra.

Na formulação de generalizações, Galbraith (1995) distingue entre os alunos que seguem uma abordagem empírica, testando alguns casos, e os que seguem uma abordagem dedutiva. Nos primeiros, distingue ainda os que fazem testes ao acaso, de modo arbitrário, e aqueles em que a escolha dos casos a testar é guiada pela sua compreensão do domínio da conjetura em causa. Por seu lado, os alunos que seguem abordagens dedutivas enfrentam três etapas: (i) "reconhecer a relevância de um certo princípio externo"; (ii) "reconhecer o modo em que o princípio é útil"; e (iii) "aplicar o princípio apropriadamente" (Galbraith, 1995, pp. 415-6). Pelo seu lado, Lithner (2008), em diversas investigações sobre os processos de raciocínio dos alunos, indica que estes, na resolução de tarefas, tendem a focar-se sobretudo no que lhes é familiar e no que recordam a um nível superficial, dando pouca atenção às propriedades matemáticas dos conceitos envolvidos, mesmo quando estas poderiam proporcionar grandes progressos. Refere que, nos poucos casos em que as estratégias dos alunos se apoiam em conceitos matemáticos relevantes, o raciocínio tende a ser dominado por imagens guardadas na memória e por rotinas familiares.

Pelo seu lado, as representações matemáticas assumem um papel incontornável em toda a aprendizagem. O programa de Matemática do ensino básico destaca a necessidade dos alunos compreenderem e saberem usar diferentes representações, referindo que "o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (ME, 2007, p. 9). Com a aprendizagem das representações matemáticas os alunos podem aceder às ideias que estas expressam, adquirindo um conjunto de ferramentas indispensável para pensar matematicamente (NCTM, 2007). Além disso, para compreender o raciocínio dos alunos e a sua interpretação das tarefas é necessário observar as suas representações (NCTM, 2007).

Podemos dizer que uma representação é uma configuração que pode substituir, sugerir ou simbolizar um objeto que está a ser representado (Goldin, 2008). Duval (2006) sublinha que os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a sua representação, indicando que este é um dos maiores problemas na compreensão dos alunos pois só é possível aceder a um objeto matemático através das suas representações. Tal como refere Goldin (2008), é importante distinguir representações externas e internas. Este autor salienta que as representações internas de cada indivíduo não podem ser diretamente observadas por terceiros. Indica ainda que as representações internas constituem sistemas interrelacionados que nos permitem produzir um vasto leque de representações externas. Pelo seu lado, Duval (2004, 2006) distingue duas transformações de representações externas, os tratamentos e as conversões. Define tratamentos como transformações dentro de um mesmo registo de representação (como resolver uma inequação) e conversões como transformações entre registos de representação, mudando a representação de um objeto, situação ou informação de um certo registo para outro registo de representação (como representar graficamente uma função dada em representação algébrica ou escrever em linguagem algébrica uma relação dada em linguagem natural). Esta mudança de registo de representação é muitas vezes fundamental para uma compreensão adequada do objeto em questão ou para prosseguir a sua análise fazendo conversões na nova representação. Deste modo, como refere Duval (2004), o desenvolvimento do raciocínio passa por diversificar e coordenar os diferentes registos de representação.

Finalmente, os processos de significação têm também um papel importante no raciocínio matemático, estabelecendo conexões essenciais para formular, testar e justificar conjeturas. Como refere o NCTM (2009), a significação é o processo pelo qual o indivíduo estabelece relações entre aspetos do seu conhecimento para desenvolver a compreensão de uma situação, contexto ou conceito. Segundo este documento, a significação, como aspeto do raciocínio, leva a identificar elementos comuns em certas observações e a perceber como tais elementos envolvem conexões com situações anteriores. Para o NCTM (2009) a significação permite interligar processos informais e formais, constituindo assim uma base fundamental para o desenvolvimento dos conhecimentos e capacidades dos alunos. Deste modo, relacionar o raciocínio com as representações e a significação é essencial não só para desenvolver o raciocínio dos alunos mas também para os levar a compreender a Matemática.

Metodologia de investigação

Os dados apresentados nesta comunicação fazem parte de uma investigação mais alargada (Mata-Pereira, 2012) que tem em vista analisar processos de raciocínio dos alunos e compreender o seu contributo na construção do seu conhecimento matemático, seguindo uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa. O estudo tem por base a observação participante, apropriada para estudos de cunho naturalístico, quando os significados que os próprios atores dão às situações que vivem são centrais na investigação a realizar (Jorgensen, 1989).

As observações foram feitas numa turma do 9.º ano de uma professora que segue este ano pela primeira vez o atual programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). A responsabilidade da condução do trabalho na sala de aula recai essencialmente na professora, mas o acompanhamento da realização das tarefas ocorre em codocência com a primeira autora (daqui em diante designada investigadora), de modo a explorar mais aprofundadamente os processos de raciocínio dos alunos. Deste modo, ainda que o papel da investigadora em sala de aula seja o de "segunda professora da turma", nos momentos introdutórios e de discussão em grande grupo a sua participação foi muito reduzida. As tarefas da unidade de ensino "Números reais e Inequações", na qual é realizada a investigação, foram elaboradas em conjunto, tendo por base propostas apresentadas pela investigadora, tendo em vista criar situações suscetíveis de evidenciar aspetos do raciocínio dos alunos.

A turma é composta por 17 alunos. De acordo com a professora, 7 destes alunos têm um baixo desempenho em Matemática, 3 têm muito bom desempenho e os restantes um desempenho mediano. A turma tem um ambiente de trabalho produtivo e as atividades são principalmente realizadas em pequenos grupos. A recolha de dados é realizada pela investigadora e tem como local preferencial a sala de aula, usando processos característicos da observação participante, nomeadamente, observação direta (com gravação em vídeo) e recolha documental.

Na análise de dados, procuramos identificar os processos de raciocínio utilizados, o que influencia estes processos, as representações utilizadas pelos alunos e os processos de significação envolvidos. Esta análise tem por base o quadro conceptual apresentado na Figura 1, onde se caracteriza a generalização sobretudo pela formulação de conjeturas gerais a partir de casos específicos, como aspeto do raciocínio indutivo e abdutivo. Neste quadro, o raciocínio corresponde à zona central e é identificado pelos seus processos, que não são necessariamente sequenciais ou obrigatórios. Por exemplo, os alunos podem testar casos específicos formulando uma conjetura apenas posteriormente ou formular conjeturas específicas ou gerais sem formularem explicitamente questões. Note-se que o raciocínio apoia-se nas representações e articula-se com os processos de significação.

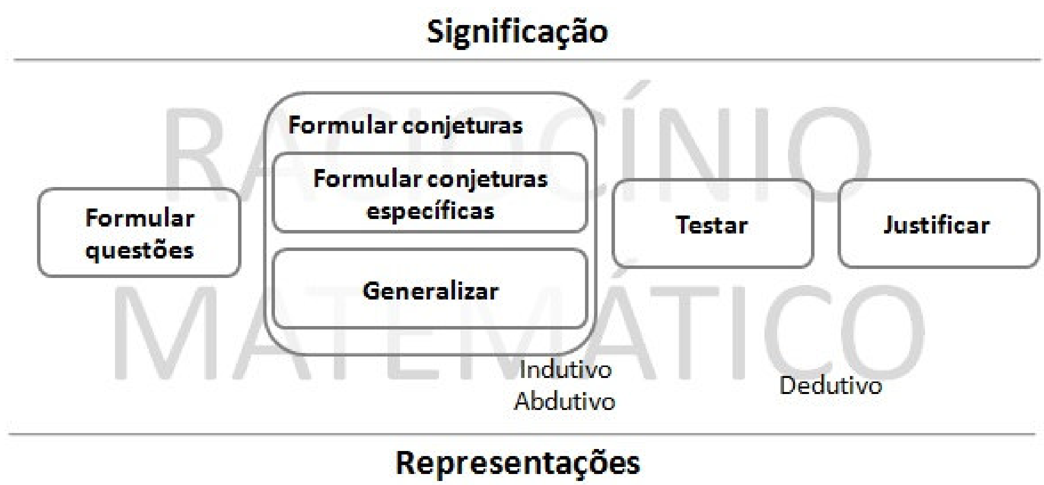


Figura 1 - Processos de raciocínio e sua relação com representar e significar (adaptado de Mata-Pereira & Ponte, 2011).

Deste modo, nesta comunicação, a organização e interpretação dos dados conduz a uma descrição de processos de generalização de alguns alunos da turma (cujos nomes são fictícios). Analisamos diversas questões de duas tarefas da unidade de ensino "Números reais e inequações" identificando em cada caso as representações utilizadas e os processos de significação evidenciados.

Generalização com números reais

De uma tarefa referente às propriedades dos números reais, apresentamos algumas questões (questões 3 a 6) que solicitam implicitamente generalizações (Figura 2). Assim, a questão 4 solicita uma generalização de uma propriedade da multiplicação de raízes quadradas e a questão 6 apresenta uma generalização que deve ser identificada pelos alunos como não sendo válida.

3. Determina o valor exato das seguintes expressões:

3.1. $\sqrt{4\times16}$ 3.2. $\sqrt{25\times144}$ 3.3. $\sqrt{36\times2}$ 3.4. $\sqrt{\frac{16}{4}}$

4. Observa atentamente os resultados obtidos em 3.

4.1. Tenta encontrar uma regra que permita obter mais facilmente o valor das expressões:

4.1.1. $\sqrt{a\times b}$ (a e b não negativos) 4.1.2. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (a não negativo e b positivo)

5. Todos os números reais seguem as regras que obtiveste? Investiga.

6. Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

Figura 2 – Questões 3 a 6 da Tarefa sobre Números reais.

Gustavo, após realizar a questão 3, tem facilidade em encontrar um processo alternativo para a sua resolução, sem intervenção da investigadora ou da professora (Figura 3). Apesar de estar claramente a responder à questão 3, utiliza já uma generalização em linguagem natural para o processo utilizado dado que não refere o caso particular das raízes quadradas de quatro e de dezasseis, indicando apenas raízes quadradas em geral ao escrever "Calcula-se as raízes quadradas separadamente". Note-se que esta frase não se refere especificamente à questão 3.1. pois o aluno não sente necessidade de a repetir para cada uma das questões seguintes, ainda que aplique para cada uma a generalização que formula em 3.1.

Determina o valor exato das seguintes expressões:

$\sqrt{4\times16}=\sqrt{64}=8 \rightarrow$ O valor exato é 8 $\rightarrow$ Calcula-se as raízes quadradas separadamente: $\sqrt{4}\times\sqrt{16}=2\times4=8$

$\sqrt{25\times144}=\sqrt{3600}=60 \rightarrow$ O valor exato é 60 $\rightarrow \sqrt{25}\times\sqrt{144}=5\times12=60$

$\sqrt{36\times2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=\sqrt{72}\rightarrow$ O valor exato é $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{16}{4}}=\sqrt{4}=2\rightarrow$ O valor exato é $2\rightarrow\sqrt{16}:\sqrt{4}=4:2=2$

Figura 3 – Resolução de Gustavo da questão 3.

Na questão 4, Gustavo tem facilidade em converter a generalização que obteve na questão 3 em linguagem natural escrita para linguagem simbólica com variáveis (Figura 4), referindo ainda a utilização da questão 3 para a generalização apresentada na questão 4:

Investigadora: Posso saber como é que chegaste a esta conclusão?

Gustavo: Separei a raiz quadrada. Aqui estava raiz quadrada de *a* vezes *b* e eu apenas separei, raiz quadrada de *a* vezes raiz quadrada de *b*.

Investigadora: E porque é que fizeste isso? Achaste que sim, que funcionava, e como é que sabes que isso funciona?

Gustavo: Verifiquei.

Investigadora: Verificaste como?

Gustavo: Calculadora (refere-se à obtenção dos resultados apresentados na questão 3).

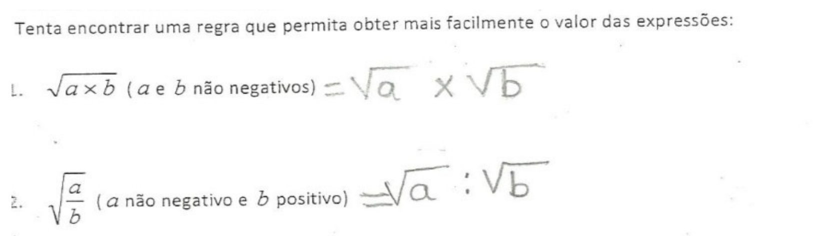


Figura 4 – Resolução de Gustavo da questão 4.

Deste modo, na questão 3, Gustavo mostra facilidade nos tratamentos em linguagem simbólica sem variáveis e realiza também com facilidade, por iniciativa própria, a conversão entre linguagem natural escrita e linguagem simbólica sem variáveis. Na passagem da questão 3 para a 4, mostra facilidade na conversão de linguagem simbólica sem variáveis para linguagem simbólica com variáveis. O aluno formula a generalização pretendida recorrendo aos casos particulares utilizados na questão anterior. Evidencia uma compreensão através das conexões estabelecidas entre os casos particulares apresentados na questão 3, a expressão algébrica apresentada na questão 4 e o conceito de regra matemática.

Outro aluno, Afonso, na questão 6, utilizando a igualdade dada e um caso particular adicional, formula uma generalização sobre quais as situações em que a expressão dada é válida (Figura 5), não se limitando a refutar a generalização da expressão algébrica apresentada para quaisquer valores reais *a* e *b*.

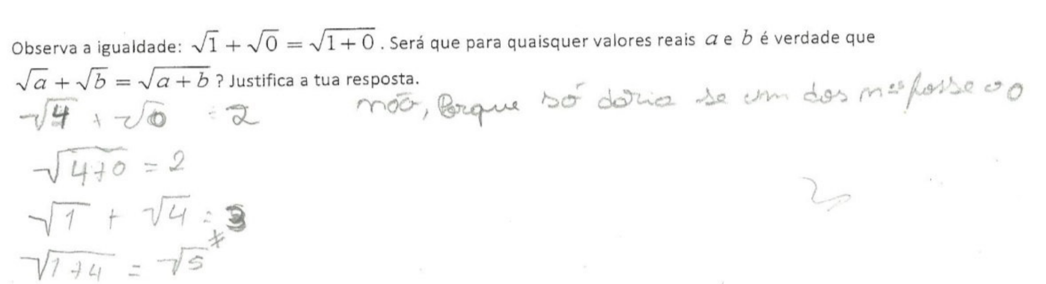
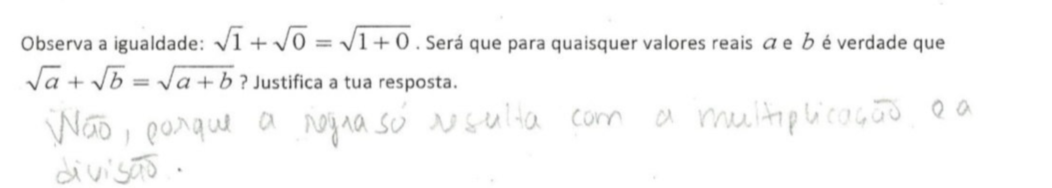


Figura 5 – Resolução de Afonso da questão 6.

Nesta questão, Afonso utiliza essencialmente a linguagem simbólica sem variáveis, mostrando facilidade nos tratamentos. Mostra facilidade na conversão de linguagem simbólica com variáveis para linguagem simbólica sem variáveis ao particularizar para os seus exemplos a expressão algébrica apresentada no enunciado. A generalização que apresenta na situação descrita é baseada em casos particulares, nomeadamente casos escolhidos a título de exemplo pelo aluno. Assim, formula uma generalização que não era pedida, mas que advém de casos particulares que utilizou para verificar a validade da generalização pretendida. Nesta questão, estabelece conexões que lhe permitem uma compreensão da situação, nomeadamente, entre a igualdade numérica e a expressão algébrica apresentadas no enunciado, algumas propriedades dos números reais e alguns casos particulares que constrói partindo da expressão algébrica dada no enunciado.

Também na questão 6, Iris responde impulsivamente baseando-se na propriedade da multiplicação de raízes quadradas que obteve na questão 4, sendo posteriormente guiada a rever a sua resposta:

> *Iris:* Sim! É sim.
>
> *Investigadora:* Experimenta lá.
>
> *Iris:* É, porque foi o que nós fizemos aqui (refere-se à questão 4)
>
> *Investigadora:* É a mesma coisa? Experimenta.
>
> *Iris:* Cá para mim é só com vezes. (Escreve o exemplo que experimenta enquanto fala.) Raiz de dezasseis mais raiz de quatro dá seis. Agora, vinte… Pois, não vai dar, era suposto dar raiz de trinta e seis. (Apaga o exemplo.) Então, não, porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão (Figura 6).


Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

Não, porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão.

Figura 6 – Resolução de Iris da questão 6.

Ainda que a utilização de casos particulares seja o processo mais utilizado para formular generalizações nesta tarefa, em algumas situações os alunos mobilizam propriedades matemáticas já conhecidas, como na resolução da questão 6 por Iris. A aluna começa por usar apenas a linguagem natural oral, complementando-a depois com a linguagem simbólica sem variáveis, realizando assim conversões entre estas duas representações. Na utilização conjunta destas representações, realiza ainda tratamentos em cada uma das linguagens. Apesar de, numa primeira fase, validar erradamente a generalização, utiliza propriedades matemáticas conhecidas da questão 4 para o fazer. Com alguma intervenção da investigadora, a aluna consegue detetar o seu erro, recupera a mesma propriedade e formula uma generalização que inclui implicitamente propriedades das quatro operações no conjunto dos números reais. Para testar a sua conjetura, utiliza um caso particular, confirmando a generalização implícita em "Cá para mim é só com vezes". Esta generalização é alargada à divisão por a propriedade da divisão já ter sido explorada em situações anteriores. Quanto à subtração de raízes quadradas, a aluna não sente necessidade de testar a propriedade, possivelmente por considerar a subtração enquanto caso particular da adição. Nesta questão, ao formular uma generalização para uma propriedade da raiz quadrada nas várias operações, estabelece conexões entre o caso particular que utiliza, as propriedades obtidas nas questões anteriores e a subtração enquanto caso particular da adição. Deste modo, demonstra uma boa compreensão da situação que deriva dos processos de significação que utiliza.

Generalização em inequações

Da tarefa de introdução às inequações, apresentamos a questão 1 (Figura 7) que, por envolver um primeiro contacto com inequações, é aquela onde surgem processos de raciocínio que envolvem generalização.

1. Indica o conjunto solução das seguintes desigualdades, em IR:

1.1. $5+x<10$	1.3. $7<x+1$	1.5. $t-3<0$
1.2. $y-1>-4$	1.4. $2c<6$	1.6. $\frac{1}{2}x>3$

Figura 7 – Questão 1 da Tarefa sobre inequações.

Nesta questão, Nádia, Débora e Ana têm alguma dificuldade na interpretação do enunciado, não compreendendo o que é pretendido e solicitam a minha ajuda para a resolução. Por este motivo, a investigadora procura esclarecer o que se pretende com a questão e faz um acompanhamento durante a primeira subquestão:

> *Investigadora:* É para dizer quanto é que pode valer o *x*. Então vamos lá. Por exemplo aqui, eu tenho: cinco mais *x* é menor que dez, ou seja, que valores é que o *x* pode ter?
>
> *Nádia:* Pode ter um, dois, três, quatro (…) Até ao quatro vírgula nove, nove, nove, nove.

Apesar de encontrarem facilmente valores para o *x*, as alunas apresentam alguma dificuldade inicial referente ao conceito de extremo no intervalo de números reais:

> *Investigadora:* Qual é o número limite?
>
> *Ana:* Quatro vírgula nove.
>
> *Investigadora:* (…) Qual é o número limite? Que não me interessa, mas que é o limite.
>
> *Nádia:* É o cinco.
>
> *Investigadora:* Portanto é do cinco...
>
> *Débora:* Para trás.

Após encontrarem o extremo superior, Ana identifica com alguma facilidade os valores que *x* pode tomar, começando por reforçar uma ideia já expressa anteriormente por Débora:

> *Ana:* Do cinco para trás.

Investigadora: É do cinco para trás, então começamos pelo cinco? (dirigindo-se a Nádia pela sua resposta (Figura 8))

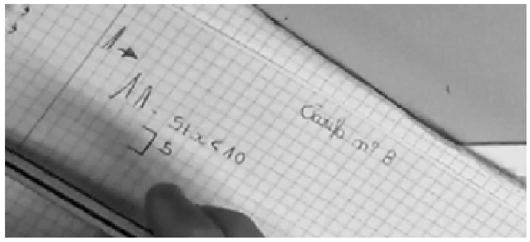


Figura 8 – Primeira resolução de Nádia da questão 1.1.

Nádia: Não, começamos pelo um...

Investigadora: E não dá abaixo do um?

Ana: Dá, não é menos infinito?

Nádia: Então é de menos infinito… (Figura 9)

Ana: Menos infinito até cinco, chaveta aberta.

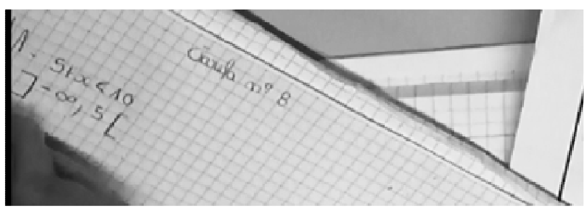


Figura 9 – Resolução de Nádia da questão 1.1.

Na questão 1.2., as alunas necessitam ainda de alguma intervenção para obterem o intervalo pretendido:

Ana: E este aqui é *y* menos um é maior que menos quatro.

Débora: Então é...

Nádia: É menos três. Menos três, menos um.

(…)

Investigadora: Se o menos três é o meu limite, agora têm só de pensar se o que interessa são os números que estão para trás desse ou os números que estão para a frente.

Débora: Estão para trás, é menos infinito com o menos três.

Investigadora: Então experimenta lá menos dois.

Débora: O menos dois...

Nádia: Não, o menos três é o limite. Então é de menos três para lá (gesticula), para dar mais, porque tem cá o sinal de maior.

Ana: Chaveta aberta, menos infinito, menos quatro.

Nádia: Mais infinito. Menos três!

Já na questão 1.3., Ana, Débora e Nádia conseguem utilizar parcialmente as ideias envolvidas nas questões anteriores e aplicá-las a uma nova situação:

Débora: O sete é menor que x mais um.

Nádia: Portanto o limite é o seis.

(…)

Nádia: O cinco mais um vai dar seis.

Investigadora: E sete é menor do que seis?

Débora: Não.

(…)

Nádia: São do seis para a frente. O sete mais um vai dar oito, é maior que sete.

Ana: Fica mais infinito.

Nádia: E é aberto.

Ana: Fica seis para mais infinito (escreve $]6, +\infty[$).

Durante a resolução da questão 1., Ana, Débora e Nádia realizam as conversões entre a linguagem simbólica com variáveis e a linguagem natural oral, presentes na interpretação do enunciado de cada subquestão. Utilizam também, e essencialmente, a linguagem natural oral, realizando a conversão para a linguagem simbólica sem variáveis para a resposta a cada subquestão. Na resolução da questão 1., parecem não ter dificuldades em qualquer das conversões.

Para a resolução das questões 1.2. e 1.3., Ana, Débora e Nádia utilizam facilmente a ideia de número limite que surge na questão 1.1., encontrando rapidamente um dos extremos do intervalo. Contudo, mostram dificuldades em concluir se se trata do extremo superior ou inferior do intervalo de números reais ao qual x pertence. Sendo o seu primeiro contacto com inequações, a identificação imediata dos extremos menos três na questão 1.2. e seis na questão 1.3. pressupõe, implicitamente, a generalização relativa à utilização da igualdade entre os membros. Esta generalização baseia-se no caso particular utilizado na questão 1.1., para o qual as alunas apenas conseguiram utilizar o conceito de extremo de um intervalo com alguma intervenção da parte da investigadora. Na questão 1.2., Nádia formula uma outra generalização ao indicar que é "para lá, para dar mais, porque tem cá o sinal de maior". Ainda que esta generalização seja bastante informal, permite identificar de imediato se o caso da igualdade dos membros corresponde ao extremo inferior ou superior. Contudo, as alunas não parecem aplicar esta generalização na inequação da questão 1.3.

Assim, na questão 1, Ana, Débora e Nádia estabelecem conexões entre a inequação e a igualdade entre os membros. No entanto, após estabelecerem esta conexão, mostram dificuldade na conexão entre a inequação e os possíveis valores de x, o que inviabiliza a construção do intervalo de números reais ao qual x pertence. Assim, aplicam a generalização obtida implicitamente para encontrar um dos extremos do intervalo, mas não conseguem aplicar a generalização enunciada por Nádia, que lhes permite compreender de imediato se se trata do extremo superior ou inferior. A falha na aplicação desta generalização leva à necessidade de teste de casos particulares para identificar se o limite obtido é o extremo inferior ou superior do intervalo a construir.

Conclusão

Nas aulas observadas, grande parte dos alunos formula generalizações seguindo uma abordagem indutiva. Generalizam as relações observadas em casos particulares para uma classe de objetos mais ampla. Em muitas destas situações, utilizam apenas um caso particular para formularem a generalização. Além das situações em que utilizam uma abordagem empírica para formular generalizações, surgem também, embora com menor frequência, generalizações de cunho dedutivo, baseadas em propriedades matemáticas conhecidas dos alunos (é o caso de Iris na questão 6 da tarefa sobre números reais). Deste modo, ao longo das aulas, é possível distinguir entre situações em que a generalização é formulada com base em casos particulares e com base em propriedades conhecidas, à semelhança do que indica Galbraith (1995). Contudo, a distinção entre a utilização de um ou mais casos particulares é também evidente durante as aulas, sendo possível subdividir as abordagens empíricas nestas duas situações distintas.

Nas diferentes tarefas, os alunos utilizam a linguagem natural oral e escrita e a linguagem simbólica sem e com variáveis, não apresentando dificuldades significativas nas transformações em registos de representações, sejam tratamentos ou conversões. Mesmo em situações em que surgem dificuldades, ultrapassam-nas sem necessidade de grande intervenção. Na grande maior parte dos casos, os alunos utilizam mais de um registo de representações durante a realização de uma questão, o que é consistente com a perspetiva de Duval (2004) segundo a qual o raciocínio precisa de coordenar uma variedade de registos de representação. Assim, e considerando a facilidade com que os alunos realizam transformações entre representações, a utilização de diferentes representações não parece limitar o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

No que respeita aos processos de significação, na maior parte das situações os alunos estabelecem conexões entre os aspetos da questão e propriedades ou conceitos matemáticos, manifestando compreensão da situação. Os seus processos de significação parecem depender da sua capacidade de estabelecer conexões apropriadas, sendo a compreensão tanto mais efetiva quanto mais complexas são as conexões que estabelecem. Os processos de significação surgem fortemente ligados à generalização na medida em que, quando os alunos têm dificuldades nas conexões entre os conceitos e propriedades necessários à consecução da tarefa, têm igualmente dificuldade na generalização.

Nas situações em que os alunos utilizam apenas um caso particular para formularem uma generalização, as conexões que estabelecem são geralmente mais superficiais, mostrando uma compreensão pouco aprofundada da situação. Assim, os processos de raciocínio que envolvem generalizações formuladas partindo de um só caso particular estão estreitamente relacionados com um uso pouco consistente de processos de significação. Tal como aponta Lithner (2008), isto remete para a não utilização ou para uma utilização superficial das propriedades matemáticas dos conceitos envolvidos, embora estas fossem essenciais para a formulação consistente de uma generalização. Noutras situações, quando os alunos utilizam mais de um caso particular para formular a sua generalização, parecem utilizar processos de significação mais complexos. Além disso, os processos de significação envolvidos nestas generalizações indiciam também conexões com propriedades e conceitos conhecidos, não podendo ser reduzidas a uma relação direta entre casos particulares e um caso geral.

Estes processos, por considerarem uma diversidade de características da situação, sugerem que os alunos usam raciocínio abdutivo. Já as generalizações baseadas mais em propriedades do que em casos particulares, revelam uma maior capacidade de raciocínio dos alunos, estabelecendo conexões de maior complexidade.

Nas relações estabelecidas entre raciocínio, representações e significação, o modelo de análise utilizado revelou-se um instrumento muito útil, evidenciando como alguns alunos são capazes de realizar certas generalizações usando raciocínio indutivo, abdutivo e dedutivo e como articulam os seus processos de raciocínio com os processos de significação e as representações utilizadas. Ao longo da unidade de ensino, as tarefas permitiram aos alunos formular generalizações numa variedade de situações. Deste modo, reiterando que se aprende a raciocinar raciocinando (Ponte & Sousa, 2010), estas tarefas parecem ser propícias ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, nomeadamente no que respeita à formulação de generalizações.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A strutural approach. *Synthese, 134*, 25-44.

Becker, R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the PME* (Vol. 4, pp. 121-128). Melbourne: PME.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*, 3-22.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Merlín.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 103-131.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412-417.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematicallearning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176-201). Routledge, NY: Taylor and Francis.

Jorgensen, D.L. (1989). *Participant observation*. Newbury Park: Sage.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Reston, VA: NCTM.

Lannin, J., Ellis A.B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching Mathematics in prekindergarten-grade 8.* Reston, VA: NCTM.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 255-276.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J.P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos do 9.º ano. *Atas do EIEM* (pp. 347-364). Obtido de http://spiem.pt/DOCS/ ATAS_ENCONTROS /2011/2011_17_JMPereira.pdf

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Ponte, J.P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no ensino básico. In APM (Ed.), *O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 213-221.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM, 40,* 131-141.