Um percurso na generalização matemática: uma experiência de ensino no 4.º ano[1]

Célia Mestre

Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada

Unidade de Investigação da Universidade de Lisboa

celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação centra-se na evolução do processo de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano do ensino básico, no decurso de uma experiência de ensino desenvolvida durante um ano letivo, focada no desenvolvimento do pensamento algébrico. A análise de dados foca-se em quatro tarefas matemáticas realizadas em diferentes etapas da experiência de ensino, a partir das resoluções escritas dos alunos e em alguns momentos da discussão coletiva considerados significativos. Este estudo evidencia a existência de três etapas da experiência de ensino com contributos específicos para o desenvolvimento do processo de generalização.

Palavras-chave: pensamento algébrico, generalização, primeiros anos, experiência de ensino

Introdução

O raciocínio matemático é considerado uma das três capacidades transversais no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB) (ME, 2007). No que concerne ao 1.º Ciclo do Ensino Básico, o programa salienta que "o desenvolvimento do raciocínio é promovido suscitando a explicação de ideias e processos, a justificação de resultados e a formulação e teste de conjeturas simples por parte dos alunos" (ME, 2007, p. 29). Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram o raciocínio matemático como essência da atividade matemática, entendendo-o como o desenvolvimento, a justificação e a utilização da generalização. Nesta perspetiva, esta comunicação centra-se no desenvolvimento da generalização matemática de alunos do 4.º ano de escolaridade.

A comunicação que se apresenta enquadra-se em um estudo mais amplo de implementação de uma experiência de ensino ao longo de um ano letivo, com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos do 4.º ano de uma turma, centrado no processo de generalização e na mobilização dos pensamentos

---

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projeto P3M - *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática,* apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

relacional e funcional. A conceção de pensamento algébrico adotada neste estudo é apresentada por Blanton e Kaput (2005) onde este é entendido como "um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413). Desta forma, a generalização é assumida como processo central para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Em particular, esta comunicação tem como objetivo descrever como o processo de generalização foi evoluindo no decurso da experiência de ensino, tendo em conta a identificação de três etapas, a saber: 1) A exploração de relações aritméticas; 2) A exploração da noção de variação e, 3) A exploração de relações funcionais. Em cada uma destas etapas foram identificados aspetos particulares do pensamento algébrico que contribuíram para a evolução do processo de generalização dos alunos da turma.

O desenvolvimento do pensamento algébrico

O PMEB (ME, 2007) reconhece a importância da introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, em consonância com os resultados da investigação internacional, dos quais se destaca o movimento *Early Algebra*. Este movimento, iniciado na década de 1980, promoveu uma nova visão da relação Aritmética-Álgebra, revelando o caráter algébrico da Aritmética e questionando a prática corrente de ensinar primeiro Aritmética e depois Álgebra. São vários os estudos (e.g. Carpenter, Franke & Levi, 2003; Fujii & Stephens, 2008; Warren & Cooper, 2005) que demostram como os alunos dos primeiros anos de escolaridade são capazes de pensar algebricamente.

Tendo em conta a definição de pensamento algébrico já apresentada, e entendendo a generalização como processo central, Blanton (2008) considera as duas vertentes seguintes como *portas de entrada* para o seu desenvolvimento: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. De uma forma geral, podemos dizer que enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e pictóricos para descrever relações funcionais.

A aritmética generalizada baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética e considera a importância da noção de equivalência associada ao sinal de igual (=) e a potencialidade da construção da generalização a partir das relações numéricas, das operações aritméticas e das suas propriedades. Carpenter, Franke e Levi (2003) identificam essas ideias como o *Pensamento Relacional* e caraterizam-no como a capacidade de *olhar* para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes. Desta forma, o pensamento relacional diz respeito à forma como os alunos podem trabalhar os números e as operações atendendo às relações existentes, em vez de se focarem exclusivamente nos procedimentos de cálculo. Nesta perspetiva, a conceção do sinal de igual enquanto indicador de uma relação de equivalência ao invés de um comando para o cálculo, reveste-se de particular importância.

No âmbito do pensamento relacional, a noção de quase-variável (Fujii, 2003) tem particular importância no estudo que se apresenta. A expressão quase-variável significa um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados (Fujii, 2003). Ou seja, expressões quase-variáveis são expressões numéricas particulares passíveis de serem generalizadas, como, por exemplo, a expressão particular "78 - 49 + 49 = 78" pode ser usada para centrar a atenção dos alunos na sua estrutura subjacente, que é do tipo "a-b+b=a". O *pensamento quase-variável* pode constituir-se como uma importante ponte entre a Aritmética e a Álgebra e, também, uma introdução ao conceito de variável (Fujii & Stephens, 2008).

No que respeita ao pensamento funcional, este baseia-se num conjunto de capacidades para além daquelas que estão associadas à aritmética generalizada. Requer que os alunos atendam à mudança e ao crescimento, o que envolve, por exemplo, estar atento à forma como as quantidades variam em relação umas às outras (Blanton, 2008). Na perspetiva de Warren e Cooper (2005), o pensamento funcional pode ser entendido como o pensamento relacional que se foca nas relações entre duas ou mais quantidades que variam simultaneamente. Desta forma, os alunos precisam reconhecer as variáveis envolvidas na relação e a forma como as mesmas variam em dependência uma da outra, ou seja, precisam reconhecer a relação de covariação. Neste sentido, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) defende que a noção de variação deverá ser trabalhada desde muito cedo na escolaridade, sendo essencial para a construção da noção de função.

A exploração de diferentes níveis de compreensão da generalização tem particular relevância neste estudo. Britt e Irwin (2011) salientam a necessidade de os alunos mais novos trabalharem em diferentes níveis de compreensão da generalização que envolvam a expressão dessa generalização em palavras, imagens e gráficos, assim como com símbolos numéricos que atuem como quase-variáveis. Para tal, sugerem o seguinte percurso: primeiramente, os alunos devem ser encorajados a trabalhar com números como quase-variáveis; depois a expressar a generalização em linguagem natural e, em seguida, usando os símbolos algébricos. O estudo que se apresenta nesta comunicação está de acordo com esta linha de pensamento.

Relativamente à introdução da simbolização em alunos destes anos de escolaridade, o presente estudo orienta-se pela perspetiva de Russell, Schiffer e Bastable (2011) ao defenderem que a introdução da notação algébrica não só providencia uma expressão concisa das ideias dos alunos como oferece novas formas de percecionar as relações matemáticas. Tendo em conta a perspetiva de Kaput (2008), de que o pensamento algébrico "é composto por processos complexos de simbolização que servem o propósito da generalização e do raciocínio com generalizações" (p. 9), a generalização e a simbolização são processos estritamente relacionados. A simbolização ao serviço da generalização permite uma expressão unificadora e concisa das relações matemáticas, surgindo como uma forma de expressão eficaz da generalização.

Metodologia do estudo

Este estudo enquadra-se no *design* de "experiência de ensino em sala de aula" (Gravemeijer e Cobb, 2006). Decorreu durante o ano letivo 2010/11, tendo sido desenvolvidas quarenta e duas tarefas, organizadas em cinco sequências de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um fio condutor curricular (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. As tarefas foram introduzidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de cerca de duas horas cada. As aulas onde se aplicaram as tarefas foram lecionadas pela investigadora (primeira autora) e a professora titular de turma desempenhou o papel de coadjuvante.

A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (ME, 2007) desde o 3.º ano de escolaridade, no início da experiência de ensino os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na sua resolução.

As tarefas exploradas na experiência de ensino pretendiam promover o desenvolvimento da generalização em contextos que envolviam, inicialmente, o pensamento relacional e, posteriormente, o pensamento funcional. A expressão da generalização desenvolveu-se de acordo com um percurso gradual de utilização da linguagem natural e progressiva apropriação da linguagem simbólica. O quadro 1 sistematiza as cinco sequências de tarefas realizadas ao longo da experiência de ensino, identificando os aspetos do pensamento algébrico tratados em cada uma e os temas, tópicos e subtópicos do programa onde se enquadram.

De acordo com o Programa de Matemática (ME, 2007)			Experiência de Ensino	
Temas	**Tópicos - Subtópicos**	**Objectivos específicos**	**Aspetos do pensamento algébrico explorados**	**Sequências de tarefas**
Números e Operações	Números naturais - Relações numéricas - Múltiplos e divisores	- Identificar e dar exemplos de múltiplos e de divisores de um número natural - Compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores)	– Regularidades nos múltiplos e divisores – Relações numéricas – Relação de igualdade – Propriedades das operações – Expressão da generalização em linguagem natural	I
	Operações com números naturais - Multiplicação	- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades. - Compreender os efeitos das operações sobre os números	- Propriedades das operações - Relação de igualdade - Propriedades das operações - Operações inversas - Tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica - - Outras representações (tabelas, diagramas)	II
			- Propriedades das operações - Relação de igualdade - Variação - Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, linguagem simbólica)	III
Medida	Comprimento e área - Perímetro - Área	- Resolver problemas envolvendo perímetro e área	- Variação e covariação - Relações funcionais - Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, gráficos, linguagem simbólica)	IV
Números e Operações	Regularidades - Sequências	- Investigar regularidades numéricas - Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional	- Relações numéricas - Relações funcionais - Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, linguagem simbólica)	V

Quadro 1 - Sistematização da experiência de ensino, de acordo com o PMEB.

Esta comunicação centra-se em três etapas da experiência de ensino e na sua relação com o desenvolvimento da expressão de generalização pelos alunos. Para cada uma das etapas apresenta-se uma ou duas (esta última no caso da segunda etapa, por se relacionarem entre si) tarefas que evidenciam uma evolução na expressão de generalização por parte dos alunos.

Os dados foram recolhidos a partir dos registos escritos dos alunos ao resolverem as tarefas matemáticas de modo autónomo em grupos de 2 ou 3, e de alguns momentos considerados significativos das discussões que ocorreram em grande grupo nas aulas. A análise dos dados foca-se na identificação dos aspetos de desenvolvimento dos pensamentos relacional e funcional que foram explorados em cada uma das etapas, e consequentemente, na sua contribuição para o processo de generalização.

Apresentação dos resultados

Nesta secção são apresentadas, resumidamente, as quatro tarefas das diferentes fases da experiência de ensino. Na primeira etapa relativa à exploração de relações aritméticas apresentamos uma tarefa - "Calcular usando o dobro" - que revela a forma como os alunos usaram expressões particulares para identificar a estrutura aritmética de uma estratégia de cálculo e como expressaram a sua generalização. A segunda etapa relativa à exploração da noção de variação apresenta duas tarefas interligadas - "Os cromos da Ana e do Bruno" e "Descobre A e B" - que exploram uma igualdade com duas quantidades desconhecidas interrelacionadas. Na última etapa apresentamos uma tarefa que explora relações funcionais através de uma sequência pictórica - "Cubos com autocolantes".

1. A exploração de relações aritméticas

Tarefa "Calcular usando o dobro"

A tarefa "Calcular usando o dobro", 13.ª tarefa da experiência de ensino, enquadrada na segunda sequência, explora uma estratégia de cálculo utilizando as relações numéricas de dobro e metade através de três exemplos numéricos. Pretendia-se que os alunos explicassem a estratégia e que a generalizassem para outros casos para além dos enunciados.

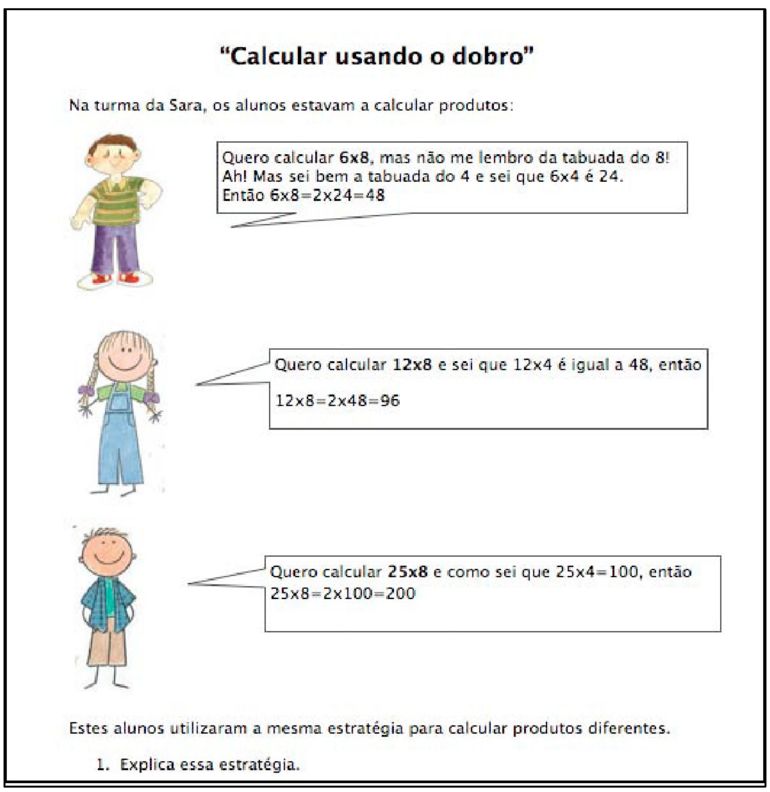


Figura 1- Enunciado da tarefa "Calcular usando o dobro".

Na explicação da estratégia, os diferentes pares de alunos conseguiram identificar as relações de dobro e metade, reconhecendo os produtos da tabuada do oito como o dobro dos produtos da tabuada do quatro. Dos oito pares, cinco explicaram verbalmente a estratégia de cálculo aplicada a um ou mais exemplos do enunciado. Um dos três pares restantes explicou a estratégia reconstruindo a igualdade apresentada no enunciado da tarefa e tornando mais explícita a relação de dobro envolvida na estratégia de cálculo, pela identificação dos produtos da tabuada do oito como o dobro dos produtos da tabuada do quatro, para cada um dos exemplos apresentados na tarefa.

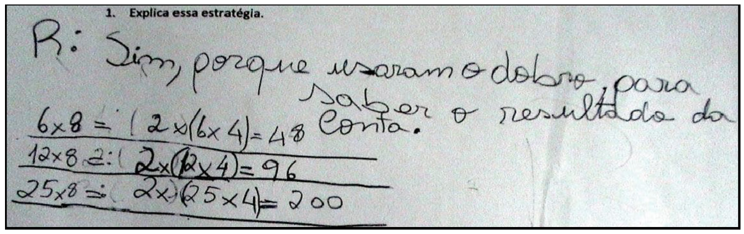


Figura 2 - Resposta do par António e Carolina.

Na resposta do par seguinte, os alunos explicam a estratégia recorrendo a outros exemplos para além dos apresentados no enunciado da tarefa. Mostram o procedimento que efetuam para obter os produtos da tabuada do oito usando o dobro dos produtos da tabuada do quatro, embora não o registando corretamente. Desta forma, estes alunos conseguem estender essa estratégia para além dos exemplos apresentados no enunciado da tarefa.

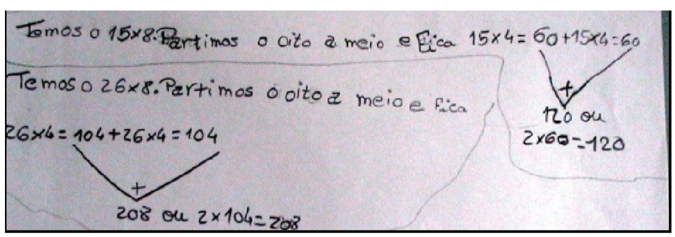


Figura 3 - Resposta do par Joana e Gonçalo.

A figura seguinte ilustra que os alunos apreenderam a estrutura da estratégia de cálculo para além dos exemplos particulares apresentados e que conseguem enunciá-la de uma forma mais geral. Quando referem que para saber o resultado da multiplicação de um fator por 8, “multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo fator”, não se referem a nenhum fator específico, ampliando a estratégia para um qualquer fator possível, embora ainda no contexto específico das tabuadas do 4 e do 8.

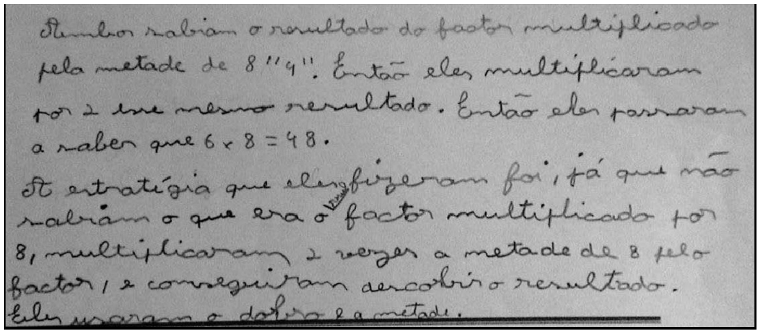

Nenhum sabiam o resultado do factor multiplicado
pela metade de 8 "4". Então eles multiplicaram
por 2 ese mesmo resultado. Então eles passaram
a saber que 6 x 8 = 48.
A estratégia que eles fizeram foi, já que não
sabiam o que era o factor multiplicado por
8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo
factor, e conseguiram descobrir o resultado.
Eles usaram o dobro e a metade.

Figura 4 - Resposta do par Matilde e André.

Na exploração coletiva desta tarefa, após diferentes pares apresentarem as suas resoluções, a investigadora solicitou aos alunos que expressassem a estratégia de cálculo de uma forma mais geral para "dar para todos os casos da tabuada do oito e do quatro". Em coletivo, e através da sugestão de diferentes alunos, a expressão da generalização em linguagem natural foi registada do seguinte modo "Para descobrirmos a tabuada do 8 fazemos o dobro (2X) da tabuada do 4". Nesse momento, a investigadora conduziu os alunos à expressão dessa generalização em linguagem matemática:

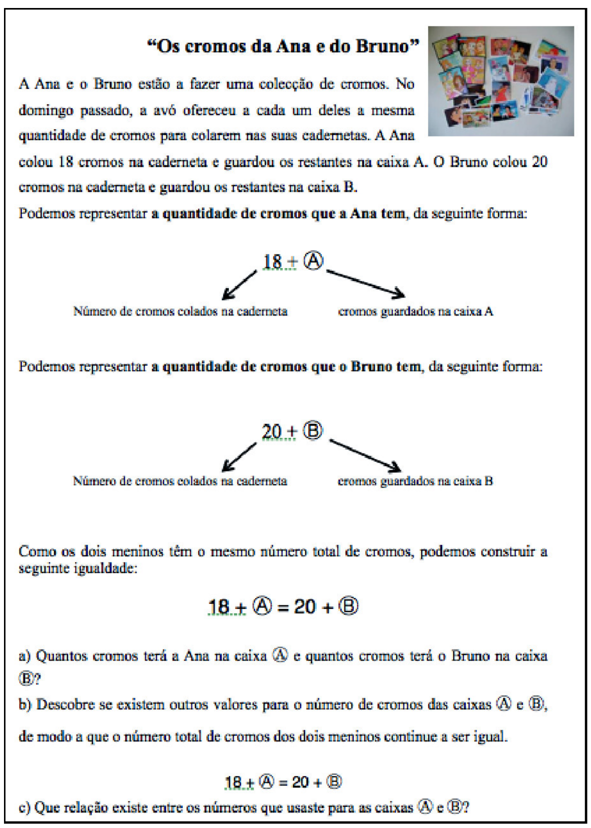
> Investigadora – (...) agora quero que pensem nesta frase que o João escreveu e que a escrevam na linguagem matemática. Como é que eu posso usar a linguagem matemática?
> Vários alunos – Com contas.
> Investigadora – Então como é que eu posso escrever isto? Mas atenção que eu não quero para casos particulares como o 6x8, o 12x8 ou o 25x8, eu quero para todos os números da tabuada do 8 e do 4.
> Rita – Podemos fazer para 7x8.
> Investigadora – Isso é um caso particular. Eu quero que dê para todos os casos.
> Rita – Como assim?
> Investigadora – Para todos os casos da tabuada do 8. O que é que acontece na tabuada do 8?
> Aluno – É sempre mais oito.
> Investigadora - Vamos acrescentar sempre mais oito. Ou seja, se usarmos a multiplicação estamos a fazer o quê?
> Alunos – Sempre a multiplicar por oito.
> Investigadora – Como é que eu posso escrever isso?
> Rita – Usamos um ponto de interrogação.
> Fábio – Vezes oito.

Ao referir-se ao "ponto de interrogação", Rita utiliza o símbolo que tinha sido introduzido pela investigadora em uma tarefa anterior. Assim, a aluna consegue escrever no quadro a seguinte expressão: ?x8=2x(?x4)=?[2]. A expressão foi discutida com a turma e a investigadora propõe a substituição do “ponto de interrogação” por um número qualquer. Após esse processo, os alunos constatam que a expressão não pode ser verdadeira. Sugerem, então, que a seguir ao sinal de igual não deverá estar o “ponto de interrogação”. Desta forma, acordam que a expressão que traduzirá o que escreveram em linguagem natural será a seguinte: ?x8=2x(?x4).

2. A exploração da noção de variação

Tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”

A tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”, 21ª da experiência de ensino, integra a terceira sequência, tendo sido adaptada do estudo de Stephens e Wang (2008). Esta tarefa, focada também no desenvolvimento do pensamento relacional, introduz a exploração de uma igualdade numérica envolvendo duas quantidades desconhecidas em uma situação de compensação aritmética com as operações adição e subtração. A tarefa é introduzida a partir de um contexto realista com significado para os alunos, com o intuito de a interpretar a situação e a igualdade apresentada.



“Os cromos da Ana e do Bruno”

A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. No domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B.

Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

18 + Ⓐ

Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa A

Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

20 + Ⓑ

Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa B

Como os dois meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

18 + Ⓐ = 20 + Ⓑ

a) Quantos cromos terá a Ana na caixa Ⓐ e quantos cromos terá o Bruno na caixa Ⓑ?

b) Descobre se existem outros valores para o número de cromos das caixas Ⓐ e Ⓑ, de modo a que o número total de cromos dos dois meninos continue a ser igual.

18 + Ⓐ = 20 + Ⓑ

c) Que relação existe entre os números que usaste para as caixas Ⓐ e Ⓑ?

Figura 5 - Enunciado da tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”.

---

[2] O símbolo não numérico “?” tinha sido introduzido pela investigadora numa tarefa em expressões como “?x5=100”, representando “qual o número?”.

Para responder à primeira questão da tarefa os alunos atribuíram valores às caixas A e B. Nessa resposta, três dos oito pares reconheceram a comutatividade da adição e usaram apenas os números presentes no enunciado: 18+20=20+18. Os restantes pares usaram outros números.

A alínea c) teve respostas diferentes por parte dos oito pares. Um par expressou essa relação com pouca clareza na linguagem e dois pares não identificaram corretamente a relação, embora na alínea anterior tivessem respondido corretamente. Os outros cinco pares conseguiram mostrar de forma muito clara a relação entre os números das caixas A e B. O exemplo seguinte, do par Henrique e Rita, evidencia como estes alunos reconheceram a relação numérica empregue na igualdade e como esta estava dependente da relação entre os valores iniciais 20 e 18: "A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que na caixa A há sempre mais 2 cromos do que na caixa B. Porque o 20 é mais dois cromos do que o 18 por isso é sempre mais dois cromos".

Na discussão coletiva referente à alínea c), Gonçalo escreve no quadro: "A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que a B tem sempre menos dois cromos do que a A". Neste momento, e sem que lhe tenha sido solicitado, Fábio acrescentou que a relação entre os números relativos às caixas A e B poderia ser escrita em linguagem matemática. Quando lhe é pedido para escrever no quadro aquilo a que se referia, o aluno apresenta a seguinte expressão: B-2=A. Sem se referir à correção da expressão apresentada, a investigadora propõe a construção de uma tabela no quadro, com possíveis pares de valores para A e B. Em seguida, retomou-se o que Fábio tinha referido relativamente à representação do valor de A e Rita sugeriu que a forma correta deveria ser A=B+2. Essa representação foi escrita no quadro e foram experimentados alguns valores da tabela, confirmando que estava correta. Nesse momento, a investigadora incitou os alunos a explorarem outras representações, como o diagrama de setas e o modelo da balança.

Tarefa "Descobre A e B"

Em continuidade com a tarefa anterior, a 22ª tarefa da experiência de ensino, "Descobre A e B", foi igualmente adaptada de Stephens e Wang (2008) e apresentava também uma situação de compensação aritmética, mas envolvendo as operações multiplicação e divisão. Pretendia-se que, numa primeira alínea, os alunos atribuíssem valores a A e B mantendo a igualdade e, na segunda alínea, identificassem a relação entre esses valores.

"Descobre Ⓐ e Ⓑ"

1. Observa a seguinte igualdade:

6x Ⓐ = 12 x Ⓑ

a) Coloca números nas caixas Ⓐ e Ⓑ de modo a teres três afirmações verdadeiras.

6x Ⓐ = 12 x Ⓑ

Ⓐ =

Ⓑ =

6x Ⓐ = 12 x Ⓑ

Ⓐ =

Ⓑ =

6x Ⓐ = 12 x Ⓑ

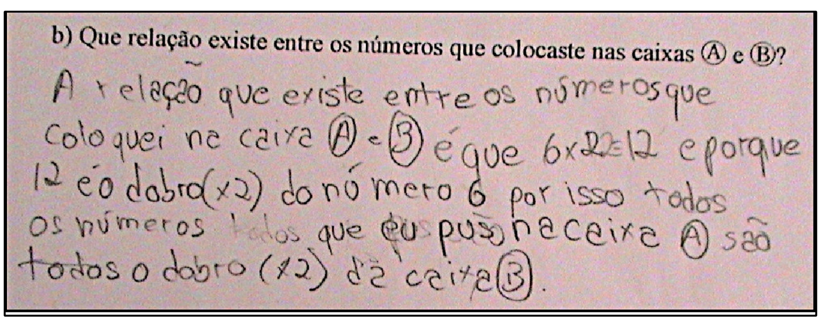
Ⓐ =

Ⓑ =

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas Ⓐ e Ⓑ?

Figura 6 - Enunciado da tarefa "Descobre A e B", primeira parte.

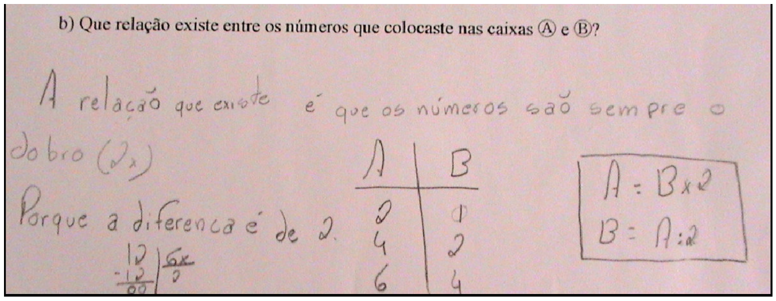
A partir das resoluções dos alunos verificou-se que oito dos nove pares conseguiram expressar a relação entre os números das caixas A e B de forma bastante clara, como mostra o exemplo seguinte:


b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas Ⓐ e Ⓑ?

A relação que existe entre os números que coloquei na caixa Ⓐ e Ⓑ é que 6x2=12 e porque 12 é o dobro (x2) do número 6 por isso todos os números ~~todos~~ que eu pus na caixa Ⓐ são todos o dobro (x2) da caixa Ⓑ.

Figura 7 - Resolução da alínea b) feita pelo par João e Lawry.

O exemplo seguinte mostra a resolução de um par que consegue representar simbolicamente, através de duas expressões diferentes, a relação entre os valores de A e B (como dobro e como metade). Os alunos apresentam ainda uma tabela evidenciando a emergência do reconhecimento de A e B como variáveis. No entanto, possivelmente sugestionados pela natureza aditiva da compensação presente na tarefa anterior, concretizam erradamente o terceiro par de valores, assumindo que "a diferença é de 2".



b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas Ⓐ e Ⓑ?

A relação que existe é que os números são sempre o dobro (2x)

Porque a diferença é de 2.

A	B
2	1
4	2
6	4

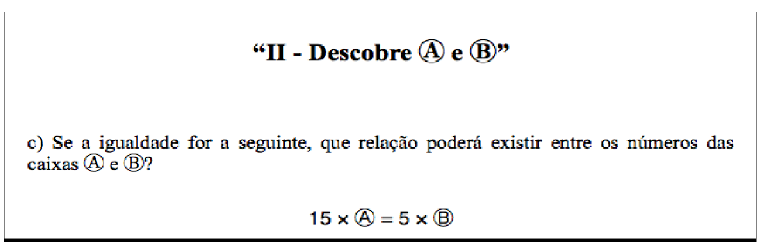
$\boxed{A = B \times 2 \quad B = A:2}$

Figura 8 - Resolução da alínea b) feita pelo par António e Fábio.

No momento de discussão coletiva, foram exploradas as representações já trabalhadas na tarefa anterior, como o diagrama de setas e o modelo da balança. Nesse momento, surgem afirmações dos alunos que mostram que, para além de apreenderem a relação numérica entre os valores desconhecidos, conseguiram chegar a uma generalização dos valores que satisfazem a igualdade e identificar o conceito de variável. Os excertos seguintes são exemplo disso:

> João: A caixa A vai ser sempre o dobro da caixa B. Os números da caixa A vão ser sempre o dobro do que está na caixa B.
> Matilde: A caixa A pode ser um número qualquer, mas tem de ser sempre o dobro da caixa B.

Tendo em conta o trabalho realizado com as expressões simbólicas na tarefa anterior, a investigadora solicita ainda uma forma de escrever a relação usando A e B. Matilde vai ao quadro e escreve corretamente: A=2xB e B=A:2. Por último, os alunos resolvem a segunda parte da tarefa que envolve também as operações multiplicação e divisão, mas que apresenta as relações mais complexas de triplo e terça parte.



"II - Descobre Ⓐ e Ⓑ"

c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas Ⓐ e Ⓑ?

$15 \times Ⓐ = 5 \times Ⓑ$

Figura 9 - Enunciado da tarefa "Descobre A e B", segunda parte.

Perante esta questão, todos os pares conseguiram expressar a relação entre os valores de A e B de forma mais ou menos explícita, usando, pelo menos, uma representação correta. Nenhum dos pares usou apenas uma forma de representação, completando a explicitação da relação em linguagem natural com outra forma de representação, como a tabela ou o diagrama de setas. Por exemplo, a resolução seguinte mostra a utilização, por um par de alunos, de diferentes formas de representação para expressar a relação entre os números das caixas A e B. O diagrama com setas tem explícito o tipo de relações entre os valores A e B e também a relação de dependência com o 15 e o 5. Recorre ainda à representação da balança para ilustrar um exemplo daquela igualdade.

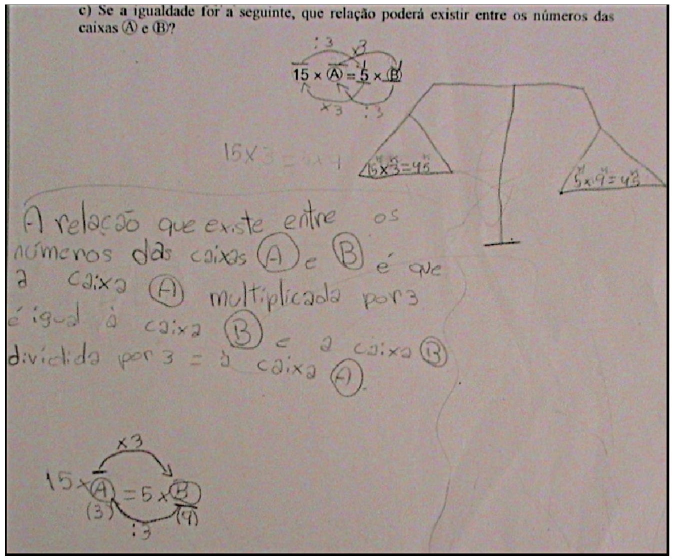


Figura 10 - Resolução da alínea c) feita pelo par Gonçalo e Joana.

No momento da discussão coletiva verifica-se que a maioria dos alunos não só compreendeu as relações numéricas, como consegue expressá-las em linguagem simbólica através de uma expressão matemática. Essa compreensão é manifesta quando os alunos reagem a uma resolução apresentada pelo par Fábio e António. António vai ao quadro e expressa corretamente as relações numéricas presentes através da linguagem natural: "O B é o triplo de A. O A é a terça parte de B". No entanto, quando, em seguida, António representa simbolicamente os valores de A e B, escreve incorretamente B=A:5 e A=Bx5. Os colegas reagem, de imediato, e o par de alunos admite que se tinha enganado e substitui o cinco pelo três: B=A:3 e A= Bx3. Mas, os colegas mantêm-se atentos e uma das alunas consegue identificar o erro dos colegas, corrigindo-o:

> Rita: Aqui, como eles estão a dizer (apontando para o que os colegas escreveram em linguagem natural)... O B é o triplo... Aqui era o vezes (apontando para a expressão B = A : 3, escrita pelo António) do A. (...) Porque eles disseram que o B é a terça parte do A.

Esta aluna representa corretamente as duas expressões: B=3xA e A=B:3. Quando a investigadora questiona os alunos sobre o porquê de isso acontecer, Rita refere que "cinco vezes três é quinze e quinze a dividir por três é cinco". Matilde acrescenta ainda que “B podia ser um número qualquer, mas tinha que ser o triplo do A”, expressando a generalização da relação trabalhada.

3. A exploração de relações funcionais

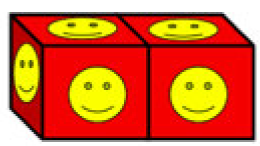
Tarefa “Cubos com autocolantes”

A tarefa “Cubos com autocolantes” enquadra-se na quinta sequência e foi a penúltima tarefa da experiência de ensino. Pretendia-se explorar o desenvolvimento do pensamento funcional através da identificação das variáveis envolvidas na situação, da forma como as mesmas se relacionavam e do reconhecimento do que se mantém constante na sequência. A situação foi modelada com recurso a materiais concretos (construções com dois e com três cubos), tendo em conta que esta foi a primeira vez que os alunos trabalharam com padrões envolvendo objetos tridimensionais.

Tarefas “Cubos com autocolantes”

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.

   1.1. Três cubos. 1.3. Dez cubos.

   1.2. Quatro cubos. 1.4. Cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 11 – Enunciado da tarefa “Cubos com autocolantes”.

Nesta tarefa, os sete grupos expressaram corretamente uma regra que permitia saber o número de autocolantes para qualquer número de cubos. Utilizando palavras e/ou símbolos e até outras representações como tabelas e desenhos, todos os alunos foram capazes de expressar a generalização da relação, identificando as variáveis envolvidas e o que se mantinha constante ao longo da sequência. Ao depararem-se com a tarefa, os alunos perceberam de imediato que lhes era solicitado a descoberta da “regra geral” que permitisse descobrir o número de autocolantes para “qualquer” número de cubos e procuraram, de imediato, a relação entre as duas variáveis e não a relação recursiva entre os termos consecutivos. De facto, todos os grupos foram capazes de explicar a relação direta entre o termo geral e a respetiva ordem.

A forma como expressaram a generalização foi diferente nos grupos. Apenas dois grupos expressaram a relação em linguagem natural, recorrendo também a uma representação visual da construção de cubos para auxiliar a sua explicação.

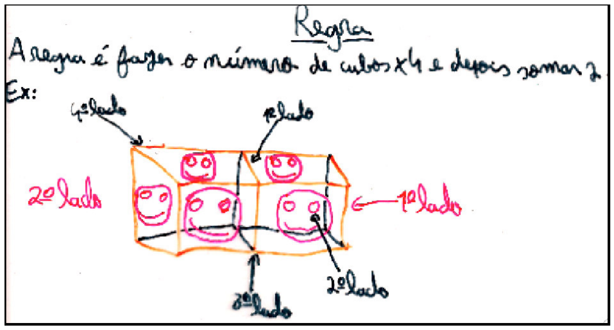


Figura 10 - Resolução do par Henrique e João P.

Dois grupos expressaram a generalização da relação recorrendo à linguagem natural e apresentando em simultâneo a representação simbólica da relação, embora com algumas imprecisões. A figura seguinte mostra a resolução de um desses pares que apresenta ainda uma tabela onde expressa as diferentes formas de visualizar a variação. Na tabela representa a relação entre as duas variáveis envolvidas na sequência e aplica a regra para determinar o número de autocolantes de cada construção. Ainda assim, estes alunos sentiram também a necessidade de identificar a relação entre os elementos da segunda coluna, explicitando a relação entre os termos consecutivos da sequência.

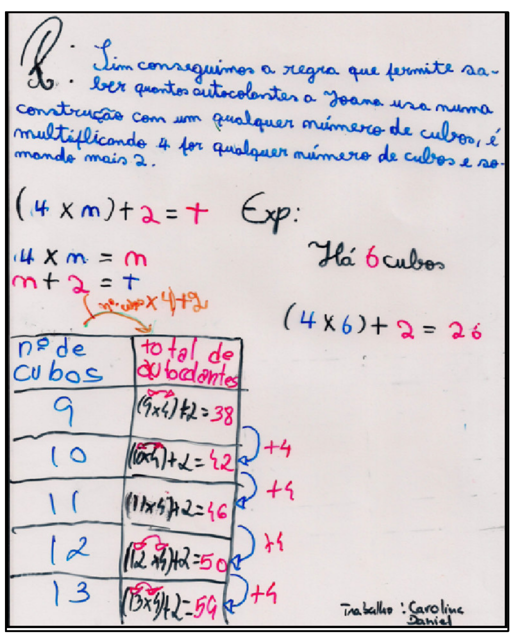


Figura 11 - Resolução do par Carolina e Daniel.

Três grupos expressaram a relação utilizando apenas a linguagem simbólica. A figura seguinte mostra uma das resoluções onde os alunos identificam cada uma das variáveis envolvidas na relação e, para além disso, apresentam um exemplo numérico de aplicação da regra para um número de cubos específico.

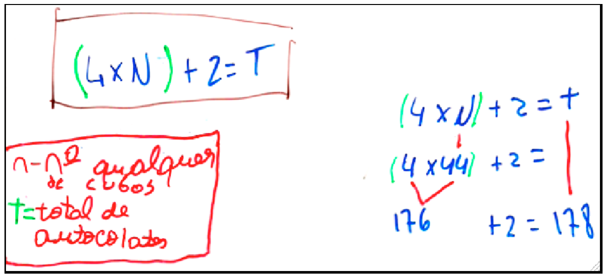


Figura 12 - Resolução do trio Gonçalo, André e Joana.

Considerações finais e conclusões

Nesta experiência de ensino foi desenhado um percurso assente em três grandes etapas: 1) exploração de relações aritméticas; 2) exploração da noção de variação; 3) exploração de relações funcionais. Na primeira etapa foi potencializado o caráter algébrico da aritmética com a exploração de situações envolvendo o pensamento relacional e a utilização de quase-variáveis, permitindo a apreensão da estrutura matemática da relação numérica e a expressão da sua generalização no contexto da situação particular trabalhada; na segunda etapa foi explorada a variação de quantidades relacionadas entre si, também através da utilização de quase-variáveis, facilitando a emergência da noção de variável, a exploração de diferentes representações e a expressão da generalização em linguagem simbólica; na terceira e última etapa, a exploração de sequências pictóricas permitiu a identificação das variáveis e da invariância (o que se mantém constante) e a expressão de uma regra geral sobre a relação matemática.

Tendo como ponto de partida as dificuldades manifestadas pelos alunos no início do ano relativamente ao sentido de número, nomeadamente o facto de evidenciarem uma visão enclausurada da aritmética, entendida como um conjunto de procedimentos e técnicas, a experiência de ensino procurou promover os aspetos relacionais da aritmética. Partindo de tarefas que exploravam relações numéricas como as empregues nas estratégias de cálculo e em igualdades numéricas, os alunos começaram a identificar as estruturas aritméticas subjacentes em vez de se focarem apenas nos procedimentos de cálculo.

Assim, na primeira tarefa apresentada, e através da utilização de casos numéricos particulares, os alunos percecionaram a estrutura matemática subjacente à estratégia de cálculo, conseguindo estender essa estratégia para além dos casos particulares enunciados na tarefa. Um dos pares expressou de forma mais geral a estrutura da estratégia de cálculo, embora ainda no contexto específico das tabuadas envolvidas. Desta forma, os alunos exploraram a noção de quase-variável, identificada por Fujii (2003), usando expressões numéricas particulares para compreender a relação matemática subjacente, estendendo essa relação a outros casos da tabuada do 4 e do 8 e expressando a generalização, embora no contexto restrito dessas tabuadas. Nesta tarefa foi ainda promovida a expressão da generalização em linguagem matemática.

As duas tarefas seguintes exploravam o conceito de variação de quantidades, também utilizando quase-variáveis (Fujii, 2003), mas desta vez numa igualdade com valores desconhecidos interrelacionados. Salienta-se a importância da exploração de representações como o diagrama de setas e o modelo da balança para a compreensão da relação de equivalência e a exploração da tabela para a emergência da noção de variável. A emergência da linguagem simbólica suscitada pela intervenção espontânea de um aluno revelou ainda como se estava a iniciar, na turma, o processo de atribuição de sentido a esta forma de representação.

A última tarefa apresentada relativa à exploração de relações funcionais denota uma evolução nas formas de expressão e representação da generalização. De facto, é evidente a forma como os alunos conseguem generalizar explicitamente a relação entre as variáveis da sequência, reconhecendo a estrutura da mesma. Assim, os alunos reconheceram o que é constante e o que varia e expressaram a estrutura da sequência através de uma regra geral. Para além disso, é também evidente a utilização com sentido da linguagem simbólica matemática.

Procurando sistematizar os aspetos que permitiram a evolução da expressão da generalização pelos alunos ao longo da experiência de ensino, segundo as três etapas referidas, importa relevar o seguinte:

- Na primeira etapa: A utilização de quase-variáveis para combater uma perspetiva enclausurada da aritmética e incitar os alunos a focarem-se numa aritmética mais relacional e generalizável através da exploração de relações numéricas. Desta forma, os alunos puderam *olhar* para as expressões numéricas, descentrando-se dos valores particulares e da finalidade única do cálculo para as relações numéricas gerais aplicáveis a um contexto numérico mais amplo;
- Na segunda etapa: A exploração de quantidades desconhecidas e a variação dessas quantidades através de expressões numéricas particulares (quase-variáveis) expressas numa igualdade proporcionou a utilização de diferentes representações promovendo a aceção da igualdade enquanto relação de equivalência e ainda a emergência do conceito de variável;
- Na terceira etapa: A exploração de uma sequência pictórica permitiu a identificação das variáveis, do que se mantém constante e a expressão explícita da generalização da relação, com crescente apropriação e significação da linguagem simbólica.

Neste percurso os alunos desenvolveram, numa fase inicial, o seu pensamento relacional e numa fase posterior exploraram aspetos centrais do pensamento funcional. Este percurso foi sendo construído tendo em conta os progressos e as dificuldades que os alunos foram evidenciando, tendo as tarefas propostas sido criteriosamente pensadas de forma a contemplar os aspetos acima descritos. Referira-se, a título de exemplo, a exploração da relação de equivalência com o intuito de colmatar a conceção do sinal de igual enquanto comando para o cálculo que se manifesta ao longo da experiência de ensino, em alguns alunos. Importa realçar o importante papel da professora investigadora na forma como as tarefas foram exploradas em sala de aula, em especial nos momentos de discussão coletiva (Mestre & Oliveira, 2012), conduzindo os alunos à apropriação de outras formas de pensar que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Referências

Blanton, M. L. (2008). Algebra and the elementary classroom. *Transforming thinking, Transforming Practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M. & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a pathway for learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 137-159). New York: Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic* & algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fujii, T. (2003). Probing Students' Understanding of Variables through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5 -17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Lannin, J.; Ellis, A. B. & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.* Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics, USA.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards of school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Mestre, C., Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma de 4.º ano. *Quadrante 21*(2), 111-138.

Russell, S., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 43-69). New York: Springer.

Stephens, M. & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education, 1(1),* 28-39.

Warren, E. & Cooper, T. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics education research journal*, *17 (1),* 58-72.