O RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE SOBRE A NOÇÃO DE QUADRADO

Ricardo Poças

UTAD – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real

ricardopocas77@gmail.com

Ana Paula Aires

UTAD – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CM-UTAD, Vila Real

aaires@utad.pt

Helena Campos

UTAD – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e CM-UTAD, Vila Real

hcampos@utad.pt

Resumo

O raciocínio matemático é uma das capacidades transversais contempladas no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) envolvendo a construção de argumentos que podem iniciar com uma simples justificação e evoluir progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem de outros temas, como, por exemplo, a Geometria. Este continua a ser um tema em que os alunos revelam, ainda, muitas dificuldades. Com este trabalho, analisou-se um grupo de alunos do 6.º de escolaridade, procurando caraterizar o posicionamento de cada um dos alunos quanto ao seu raciocínio geométrico, tendo por base os níveis de van Hiele. Mediante essa caraterização, fazendo parte de um estudo mais alargado, apresenta-se com mais detalhe o raciocínio geométrico e matemático de três alunos, que à altura estavam posicionados em três níveis distintos de van Hiele, face à forma como eles apresentavam e visualizavam a definição do conceito de quadrado. Nos três casos apresentados observa-se que os raciocínios suportam-se, fundamentalmente, pela descrição de ideias matemáticas, muitas vezes sem a utilização de exemplos ou contraexemplos e recorrendo, raramente, à justificação ou argumentação.

Palavras-chave: Raciocínio matemático, raciocínio geométrico, definição, quadrado.

Introdução

O desenvolvimento da visualização espacial, através da construção e manipulação de representações mentais de objetos, constitui um aspeto essencial do raciocínio espacial e do raciocínio geométrico (Battista, 2007). No entanto, esses mesmos domínios são frequentemente ignorados ou minimizados na educação dos primeiros anos (Sarama & Clements, 2009), sendo mesmo um tópico em que os alunos revelam ainda muitas dificuldades (Battista, 2007).

A aprendizagem de conceitos geométricos sempre foi um aspeto da matemática em que muitos alunos sentem dificuldades e a sua aprendizagem por vezes é realizada com lacunas ou erros (Fuys, Geddes & Tichler, 1988). Assim, os alunos quando chegam ao 2.º ciclo do ensino básico já experimentaram situações e atividades em que se proporcionava a oportunidade de desenvolver conceitos, propriedades e raciocínios geométricos. Assim, o nível de conhecimentos, procedimentos, comunicação, raciocínio e pensamento geométrico em que cada um dos alunos se encontra pode ser diferente. Vários estudos confirmam essa diversidade, tais como van Hiele (1986), Senk (1989), Gutiérrez (1996), Pandiscio e Orton (1998), Gray e Tall (2002), Tall (2004), entre outros.

O programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) refere que o propósito principal de ensino para o tema da geometria, ao longo dos três ciclos do ensino básico, se centra no desenvolvimento "do sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço", tendo comum um dos objetivos "desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar" (p.20, 36 e 51). Nesta perspetiva torna-se pertinente identificar os conhecimentos matemáticos e o nível de raciocínio geométrico que os alunos revelam nesta fase. Consoante o seu nível de raciocínio, será que a sua capacidade de definir e compreender um conceito geométrico é semelhante? Que caraterísticas de raciocínio matemático são evidenciadas por estes alunos, quando se situam em níveis de raciocínio geométrico diferentes?

Enquadramento Teórico

O raciocínio matemático é um processo de pensamento que surge, a partir das diferentes experiências que vão sendo proporcionadas aos alunos, com o objetivo, por um lado, de explicar, justificar e argumentar conjeturas e ideias matemáticas, para si próprio e para os outros, e por outro, para decidir que estratégias utilizar durante a resolução de problemas. Assim, em síntese, podemos dizer que as principais características do raciocínio matemático são a compreensão, a justificação e a argumentação.

Nesta linha de pensamento e tendo por base o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) para analisar o raciocínio matemático, presente na resolução das tarefas propostas aos alunos, podemos definir cinco categorias básicas: descrição de uma ideia matemática; exemplificação de uma ideia matemática; justificação de uma afirmação ou de uma ideia matemática; argumentação de uma ideia matemática; generalização de uma ideia matemática.

A Geometria, mais do que outras áreas da matemática, é um meio privilegiado para descobrir e desenvolver diferentes tipos de raciocínio, em particular, capacidades de representação visual e de raciocínio geométrico (Duval, 1998).

Tal como é dito por MacCrone e outros (2010) o raciocínio geométrico é um processo ativo em que os alunos exploram os meios através dos quais é possível investigar as características das formas, bem como, as propriedades comuns a uma família de formas, e ainda, uma variedade de estratégias para modelar formas. Por isso, consideram que o raciocínio geométrico deve assentar nos seguintes princípios: conjecturar sobre objetos geométricos, isto é, analisar diferentes formas e raciocinar indutivamente sobre relações para formular conjeturas; construir e validar argumentos geométricos, ou seja, avaliar argumentos dedutivos sobre figuras e as suas propriedades que permitem compreender situações geométricas; utilizar diferentes abordagens geométricas, isto é, analisar situações matemáticas, do ponto de vista analítico, sintético ou usando transformações; estabelecer conexões geométricas e modelações, ou seja, utilizar ideias geométricas, em particular a visualização espacial, em outros domínios da Matemática, em outras ciências e em situações do quotidiano. (MacCrone et al., 2010, p. 1). A corroborar esta ideia, Battista (2007) salienta que o raciocínio geométrico reside sobretudo na construção e utilização de sistemas conceptuais baseados em propriedades para estudar as formas e o espaço, nomeadamente para definir e analisar vários tipos de quadriláteros e triângulos.

Para descrever a evolução do pensamento geométrico, o casal van Hiele (1986), apresentou uma teoria de ensino e aprendizagem da Geometria onde propunha cinco níveis de desenvolvimento mental na construção dos conceitos geométricos. Neste seu modelo, que permite hierarquizar o desenvolvimento de conceitos geométricos e raciocínio geométrico, considera-se que a aprendizagem se processa através do desenvolvimento de conceitos e de raciocínio ao longo de vários níveis. Em termos educacionais admite-se que estes níveis são sequenciais e hierárquicos, sendo a transição, entre eles, fixa. O progresso não depende da idade ou maturidade de um aluno, mas é mais dependente das experiências educacionais vividas.

Originalmente, os níveis foram numerados por van Hiele de 0 a 4, e alguns autores, posteriormente, apresentaram outra numeração de 1 a 5, permitindo inclusive a introdução de um pré-nível 0, denominado por pré-visualização. Neste nível os sujeitos apenas reconhecem ou identificam um subconjunto das características visíveis de um objeto, não fazendo ainda distinção entre figuras (Senk, 1989; Clements & Battista, 1992). Cada um destes níveis descreve a forma como os alunos compreendem os conceitos geométricos, como por exemplo, formas geométricas, sendo identificados por "visualização", "análise", "ordenação", "dedução" e "rigor" (Quadro 1).

Nível		Descrição
1	Visualização	As figuras são entendidas de acordo com a sua aparência.
2	Análise	As figuras são caracterizadas pelas suas propriedades.
3	Ordenação	As propriedades são ordenadas logicamente.
4	Dedução	A Geometria é entendida como um sistema axiomático.
5	Rigor	Os sistemas axiomáticos são estudados.

Quadro 1. Níveis de van Hiele (Clements & Battista, 1992)

No nível "visualização", os alunos reconhecem as figuras apenas pela sua aparência como um todo, muitas vezes por comparação com um estereótipo. As propriedades da figura não são compreendidas e na resolução de problemas utilizam propriedades gerais e técnicas (por exemplo, sobreposição ou medição). Usam uma linguagem informal, tomam decisões baseadas na perceção, e não no raciocínio, e não são capazes de analisar a figura nas suas componentes ou elementos.

Os alunos, no nível "análise", reconhecem e descrevem figuras ou formas em termos das suas propriedades, mas sem estabelecer relações entre elas. Descobrem, experimentalmente, propriedades por observação, medição, desenho e modelação, são capazes de usar uma linguagem formal e simbólica e de enumerar todas as propriedades que conhecem. Contudo, não são capazes de discernir quais são as propriedades necessárias e quais são as suficientes para a definição de uma figura e não compreendem a necessidade de provar ou demonstrar algumas generalizações que descobrem empiricamente (indutivamente).

Relativamente ao nível "ordenação", os alunos já são capazes de estabelecer relações entre propriedades e entre figuras e de apresentar definições com significado, podem formar definições abstratas distinguindo o suficiente do necessário. Usando um conjunto suficiente de propriedades utilizam argumentos informais para justificar o seu raciocínio, descobrem novas propriedades por dedução, compreendem implicações lógicas e a inclusão de classes, mas ainda não entendem o significado de uma dedução formal ou de um sistema axiomático.

No nível "dedução", os alunos reconhecem e usam termos, definições, postulados e teoremas para construir uma demonstração, conhecem o significado de condições necessárias e suficientes, são capazes de comparar diferentes demonstrações, mas ainda não são capazes de fazer a distinção entre sistemas axiomáticos.

Finalmente, no nível "rigor", os alunos percebem os aspetos formais de uma dedução, estabelecendo e comparando sistemas matemáticos e são capazes de compreender sistemas não-euclidianos ou geometrias euclidianas e não-euclidianas.

Na transição do nível de "visualização" para o de "análise", relativamente à definição de conceitos matemáticos, a linguagem é introduzida para descrever as figuras observadas. Esta descrição é gradualmente desenvolvida como suporte para uma nova estrutura, facilitando a comunicação. Na transição do nível de "análise" para o de "ordenação", os alunos ainda não conseguem utilizar uma linguagem que seja utilizada para descrever raciocínios. No entanto, no nível de "dedução", já é possível os alunos construírem argumentos de uma forma sequencial.

Na proposta inicial de van Hiele, os níveis eram considerados discretos, sendo que um aluno só transitava para o nível seguinte quando tivesse desenvolvido as características dos níveis anteriores. Atualmente, estes são vistos mais como camadas que caracterizam o pensamento/raciocínio geométrico. Pandiscio e Orton (1998) apresentam como críticas ao modelo de van Hiele a falta de generalização, o que conduz a que cada situação, ou estratégia, aplicada tenha de ser revista para diferentes domínios da geometria. Por outro lado, Senk (1989) refere a ausência de um "não nível" como uma lacuna ao modelo de van Hiele, que considerava que todos os alunos deviam já ter a capacidade de identificar características geométricas comuns, pelo menos através da observação. Esta ideia é corroborada por Clements e Battista (1992) ao defenderem a existência de um pré-nível abaixo do nível "visual". Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991) argumentam que alguns alunos podem desenvolver dois níveis de van Hiele simultaneamente, permitindo que usem vários níveis de raciocínio, dependendo do conceito ou do contexto geométrico em causa. Assim, salientam que não deve ser atribuído um único nível de raciocínio a cada aluno e também, tal como é afirmado por Clements, Battista e Sarama (2001), podem coexistir diferentes níveis e ainda, podem desenvolver-se, simultaneamente, mais do que um nível.

Metodologia

O trabalho apresentado faz parte de uma investigação de carácter mais alargado com vista a abordar as relações entre o raciocínio geométrico e a definição de conceitos, nomeadamente do conceito de quadrado, com alunos do 6.º de escolaridade, antes da abordagem formal da definição da figura geométrica referida.

Tendo em consideração as questões e o foco do estudo apresentados, optou-se por um estudo com uma abordagem qualitativa, com carácter interpretativo e com *design* de Estudo de caso (Yin, 2003). A escolha teve por base: a fonte direta dos dados recolhidos ter sido em ambiente natural (a sala de aula de Matemática); um dos investigadores ter sido o agente na recolha desses mesmos dados (observação direta, produções dos alunos e questionários); e os dados recolhidos serem essencialmente de carácter descritivo (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen, Manion & Morrison, 2007).

Numa primeira fase do estudo procedeu-se a um diagnóstico dos alunos relativamente ao seu posicionamento no modelo de van Hiele. Estabeleceu-se como critério que o número de participantes, no estudo de caso, seria igual ao número de diferentes níveis de van Hiele encontrados nesta primeira fase do estudo (Tarefa I). Como após esta fase a turma apresentava alunos posicionados em três diferentes níveis, 0, 1 e 2, foi escolhido um aluno de cada um destes níveis. Foram assim, realizados três estudos de caso (Tarefa II) relativos a três alunos (Graça, Glória e Gil), de uma turma de 6.º ano de escolaridade.

Participantes e tarefas realizadas

O estudo decorreu durante o ano letivo de 2011/2012, e os três alunos (Graça, Glória e Gil), pertenciam a uma turma de 6.º ano de escolaridade de uma escola pública do ensino básico, localizada em arredores citadinos, com alunos provenientes de meios socioeconómicos médio e médio-baixo. A turma tinha 26 alunos, sendo 12 do sexo masculino e 14 do sexo feminino, oriundos de três diferentes turmas do 1.º ciclo, do mesmo agrupamento. Um dos investigadores foi o docente da turma desde o 5.º ano de escolaridade.

Graça é uma aluna empenhada, gosta da disciplina de Matemática e o seu desempenho escolar é bom. Tem 11 anos de idade, sem retenções no seu percurso escolar. Frequentou os quatro anos do 1.º ciclo sempre com o mesmo professor, e teve um único professor de Matemática no 2.º ciclo. Revela grande insegurança em sala de aula, refletindo-se na sua participação oral que é inexistente por livre vontade.

Gil é um aluno que revela alguma facilidade na compreensão dos conceitos matemáticos, no entanto não tem hábitos de estudo. Tem 11 anos e nenhuma retenção, durante o seu percurso escolar. Teve três professores diferentes durante o 1.º ciclo. É um aluno que apresenta dificuldades de comunicação oral (falando muito rápido e de forma atabalhoada) e escrita (com caligrafia pouco legível e construção frásica confusa).

Glória é uma aluna que não gosta das aulas de Matemática, também com 11 anos e sem retenções durante o seu percurso escolar. Contudo, gosta de ser participativa e procura, muitas vezes, contrariar o professor com outros exemplos ou contraexemplos, dos conteúdos que eram abordados.

Para a realização deste estudo foram elaboradas duas tarefas distintas, Tarefa I e Tarefa II, aplicadas em sala de aula em dois momentos diferentes, janeiro e abril de 2012.

A Tarefa I – "As propriedades de uma figura geométrica" (Figura 1), foi aplicada em janeiro de 2012, com a duração de 30 minutos, no início do estudo do tópico de ensino "Reflexão, rotação e translação", do tema de Geometria do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).

Tarefa I.

Enuncia ou descreve todas as propriedades da figura geométrica fornecida.

Figura 1. Enunciado da Tarefa I “As propriedades de uma figura geométrica”.

Para a realização desta tarefa, distribuiu-se, a cada aluno, uma folha para registar as suas respostas e uma figura em papel com a forma de um quadrado. O enunciado foi escrito no quadro pelo respetivo professor que solicitou, aos alunos, que justificassem as suas respostas. Durante a resolução da tarefa o professor teve a atenção de nunca referir a palavra “quadrado”. A tarefa foi realizada individualmente por cada um dos alunos, sem a ajuda do professor ou dos colegas da turma.

A Tarefa I não foi corrigida formalmente pelo professor da turma, mas, após a sua realização, estabeleceu-se um momento de diálogo entre os alunos e entre o professor e os alunos, sobre as respostas dadas.

Entre a realização das duas tarefas, além da conclusão deste tópico “Reflexão, Rotação e Translação”, foram lecionados tópicos dos temas de Números e Operações e Organização e Tratamento de Dados.

A Tarefa II – “A definição de uma figura geométrica”, composta por duas questões, foi aplicada em abril de 2012. As duas questões foram apresentadas em momentos distintos da mesma aula, sendo o tempo de realização para cada uma das questões de 10 e 5 minutos, respetivamente. Os alunos realizaram esta tarefa individualmente e sem auxílio do professor ou dos colegas da turma.

Tarefa II.

Questão 1.

Define a figura geométrica apresentada.

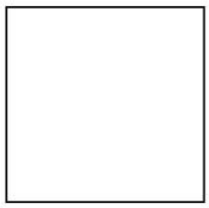

Figura 2. Enunciado da Tarefa II – Questão 1.

Para a realização da primeira questão (Figura 2), disponibilizou-se aos alunos uma folha para registarem as suas respostas, sendo o enunciado apresentado no quadro e tendo sido pedido, novamente aos alunos, que justificassem as suas respostas. De salientar que o professor disse aos alunos que a figura apresentada era a mesma que eles tinham utilizado para responder à Tarefa I. Note-se que os alunos, quando responderam às questões desta tarefa, não tiveram acesso às suas respostas da tarefa anterior. Decorrido o tempo previsto para a realização da Questão 1, foi solicitado aos alunos que guardassem a folha de registo e respondessem a uma nova questão – Questão 2 da Tarefa II (Figura *3*). Para a operacionalização da tarefa, o professor escreveu novamente o enunciado no quadrado, pedindo aos alunos que respondessem, justificando, numa nova folha.

Tarefa II.

Questão 2.

O que é um quadrado?

Figura 3. Enunciado da Tarefa II – Questão 2.

De notar que em todas as tarefas, os alunos completaram sempre as suas respostas no prazo estabelecido para a sua resolução.

Definição das categorias de análise

Com a aplicação da Tarefa I – "As propriedades de uma figura geométrica", procurou-se posicionar os alunos da turma num nível de raciocínio geométrico de acordo com o modelo de van Hiele, antes do estudo formal da definição e propriedades dos quadriláteros, em particular do quadrado.

Deste modo definiram-se como categorias de análise os níveis de van Hiele, nível[1] 0 a 3. De salientar que os níveis 4 (Dedução) e 5 (Rigor), não foram incluídos como categorias de análise neste estudo, uma vez que, nas respostas dos alunos não se registaram propriedades do quadrado que o justificassem, revelando-se assim, os restantes níveis suficientes para esta investigação. A cada uma das unidades de registo, neste caso, as propriedades do quadrado identificadas, foi associado um código com dois algarismos, sendo que o algarismo das dezenas representa o nível/categoria de van Hiele e o algarismo das unidades corresponde a uma enumeração das propriedades (Quadro 2).

Os procedimentos de seleção, categorização e de definição das unidades de registo estiveram de acordo com as regras enunciadas por Bardin (2009): regra de exaustividade, regra da representatividade, regra de homogeneidade e regra da pertinência.

[1] Aos níveis iniciais de van Hiele de 1 a 5, acrescentou-se o pré-nível 0 (Senk, 1989; Clements & Battista, 1992).

Nível 0 Pré-visualização	Nível 1 Visualização	Nível 2 Análise	Nível 3 Ordenação
01 – É uma figura geométrica. 02 – Comparação/ referência ao cubo.	11 – É um quadrado. 12 – Tem 4 lados. 13 – Tem 4 vértices. 14 – É um quadrilátero.	21 – É um polígono. 22 – Tem os lados congruentes. 23 – Tem os ângulos congruentes. 24 - Tem os 4 ângulos retos. 25 – Os lados opostos são paralelos. 26 – Os lados adjacentes são perpendiculares. 27 – É uma figura plana. 28 – O perímetro determina-se como o quádruplo da medida de comprimento do lado. 29 – A área determina-se elevando a medida de comprimento do lado ao quadrado. 2 A – As suas diagonais bissetam-se.	31 – É um quadrilátero regular. 32 – É um retângulo. 33 – É um losango. 34 – O ponto de intersecção das diagonais é o centro de uma circunferência circunscrita ao quadrado.

Quadro 2. Categorias de análise em cada um dos Níveis de van Hiele identificados.

Análise dos Resultados

Das transcrições das respostas à Tarefa I dos 26 alunos, efetuou-se a codificação das unidades de registos, sendo deste modo, posicionado cada um dos alunos num dos níveis de van Hiele, de acordo com a predominância do algarismo das dezenas nos códigos estabelecidos para as unidades de registo.

O estudo realizado apresenta uma distribuição dos alunos por três níveis diferentes, ou seja, apesar de estarem no mesmo ano de escolaridade o seu nível de raciocínio geométrico é diversificado, tal como é referido nos trabalhos de van Hiele (1986), Senk (1989), Gutiérrez (1996), Pandiscio e Orton (1998), Gray e Tall (2002), Tall (2004) e Sarama e Clements (2009). Deste modo, para se poder compreender, com mais pormenor, as caraterísticas do raciocínio geométrico destes alunos, escolheu-se três alunos, Graça, Glória e Gil.

Entre os alunos a quem foi atribuído, nesta tarefa, nível 0, foi escolhida uma aluna, Graça, pois é aquela que na sua resposta apresenta mais informação ou dados de análise do raciocínio empregue. Do mesmo modo, entre os alunos a que foi atribuído, nesta tarefa, nível 2, escolheu-se Glória, uma vez que esta apresentava respostas que continham mais informação ou dados para análise do raciocínio desenvolvido. No caso dos alunos de nível 1, foi escolhido um aluno, Gil, por dar uma resposta em que, além das propriedades mais comuns que a maioria dos seus colegas apresentou, também desenvolveu algum trabalho com conexões com outras áreas. Apesar de os alunos estarem posicionados em diferentes níveis, os desempenhos na disciplina de Matemática, nesse ano letivo, foram muito semelhantes, sendo considerados alunos com um desempenho bastante satisfatório ou com bons resultados.

O caso de Graça

Na Tarefa I, a aluna centrou a sua resolução em conteúdos que estavam no momento a ser trabalhados – Simetrias, exemplificando em desenho, as quatro simetrias axiais, uma rotação do quadrado e a sua exemplificação de que "a figura é composta por: reflexão, translação, rotação", também recorrendo ao desenho, conforme se pode visualizar na Figura 4.

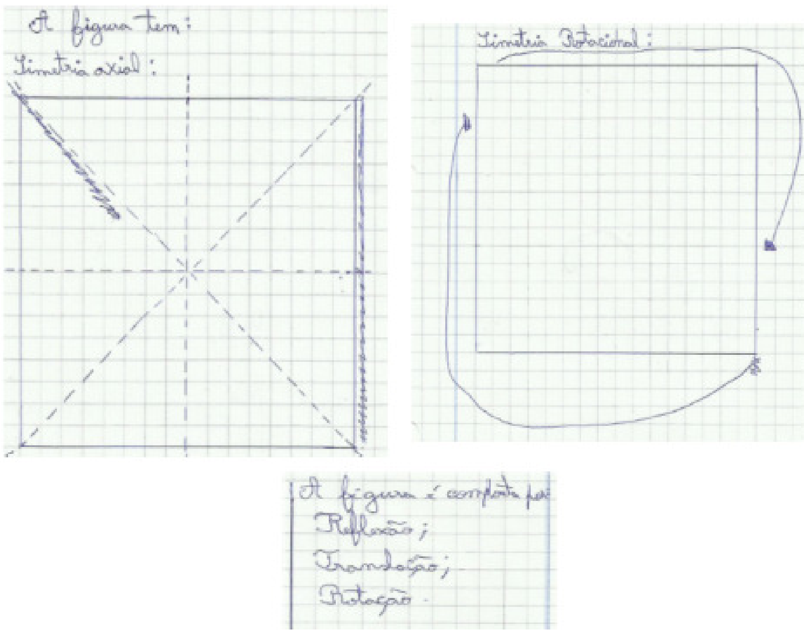

Figura 4. Exemplo apresentado pela Graça.

Quando enuncia as propriedades da figura geométrica fornecida, apresenta várias incongruências, como por exemplo, possuir ângulos retos, agudos e obtusos, não referindo quais ou quantos. As descrições matemáticas enunciadas contêm incorreções matemáticas e só apresenta exemplificações dessas ideias, sem qualquer justificação ou argumentação.

Na Tarefa II, já apresenta uma afirmação, apesar de incorreta, com justificação da sua ideia matemática "é um retângulo pois tem ângulos agudos". Na segunda parte da tarefa, retoma a mesma ideia matemática, mas desta vez com uma justificação correta é "um retângulo pois tem ângulos retos". Por fim, conclui que "um quadrado é uma figura geométrica" que não é nenhuma implicação do que foi afirmado ou generalizado, como se constata na Figura 5.

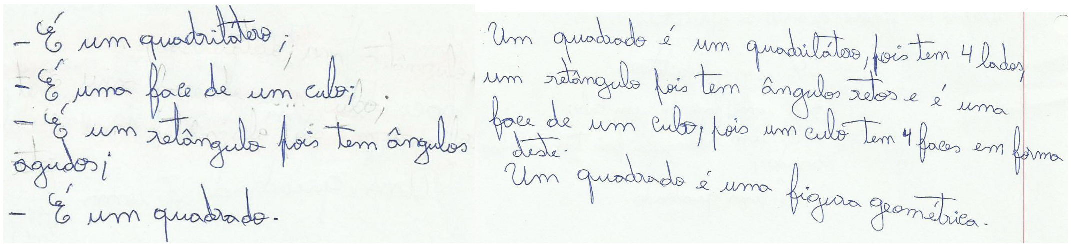

Figura 5. Resolução da Tarefa II – Questão 1 (à esquerda) e Questão 2 (à direita) da Graça.

Graça, na Tarefa I, centra a sua atividade nas duas primeiras categorias do raciocínio matemático, a descrição e a exemplificação de ideias matemáticas, relativamente à figura geométrica do quadrado. No entanto, na Tarefa II, já apresenta, além da descrição, algumas justificações das suas descrições. Durante todo o trabalho, não apresentou nenhuma argumentação ou generalização.

O caso do Gil

Na Tarefa I, Gil apresenta várias descrições de algumas propriedades da figura dada como podemos observar na Figura 6.

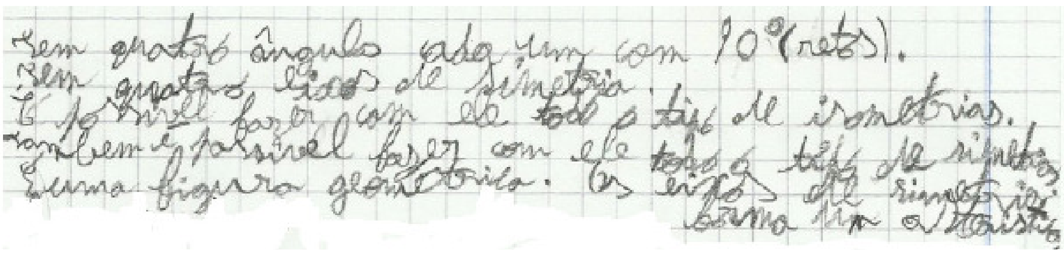

Figura 6. Excerto da resolução do Gil à Tarefa I.

Realiza afirmações, retomando algumas delas para depois apresentar exemplos, mas, no entanto, não justifica ou prova nenhuma dessas afirmações (Figura 7).

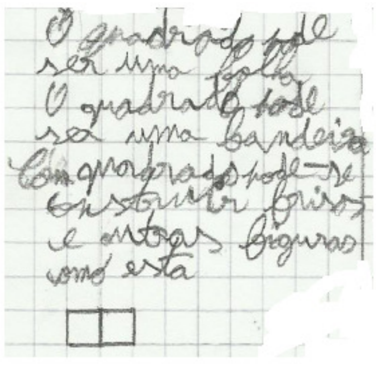

Figura 7. Exemplos apresentados pelo Gil

Durante a resolução da Tarefa I, o aluno dispersa-se, não conseguindo terminar as frases, no entanto, ao finalizar, retoma algumas afirmações, como por exemplo "O quadrado é metade de um retângulo ou pode ser se cortarmos ao meio um retângulo e se cortarmos ao meio em diagonal fazemos um triângulo". Mas, neste caso, não apresenta exemplo nem argumentações de que as ideias matemáticas referidas sejam verdadeiras, casos particulares ou generalizações.

Na realização da Tarefa II – Questão 1, o aluno, ao definir a figura geométrica ou o quadrado, descreve novamente algumas propriedades, mas surge uma afirmação que não constava na Tarefa I, "é uma figura que não tem volume". Facto que menciona novamente na Tarefa II – Questão 2, mas agora finaliza a sua definição de quadrado, com um elemento que não tinha apresentado em mais nenhum momento das suas resoluções, que foi a conexão com os sólidos geométricos (algo que foi recorrente nas respostas elaboradas por grande parte dos alunos da turma).

Durante o seu trabalho, recorreu a descrições e enunciações, várias vezes complementando com exemplos. Contudo, são ausentes justificações, argumentações ou generalizações das suas ideias matemáticas.

O caso da Glória

Na resolução da Tarefa I, enuncia várias ideias matemáticas relacionadas com a figura geométrica apresentada – o quadrado. No seu caso, é recorrente o uso de exemplos, para complementar as suas afirmações, como por exemplo na Figura 8, para ilustrar a localização dos quatro eixos de simetria ou como se podia "movimentar" o quadrado através das três isometrias.

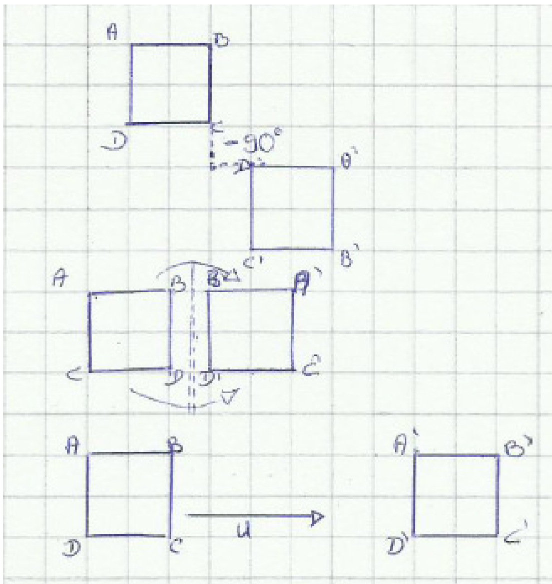

Figura 8. Exemplo da Glória para "movimentar" o quadrado através das três isometrias.

Algo que também Graça apresentou, no entanto, a representação e a linguagem utilizadas por esta última, eram, matematicamente, mais consistentes. Outro exemplo, que primeiro enuncia, é a existência de uma medida de perímetro e uma medida de área da figura geométrica, que depois, num momento mais avançado do trabalho, acaba por concretizar.

A única justificação que apresenta nos seus registos caracteriza-se por ser uma afirmação de carácter pessoal, como se observa na Figura 9, mas que se suporta por ideias ou conteúdos matemáticos.

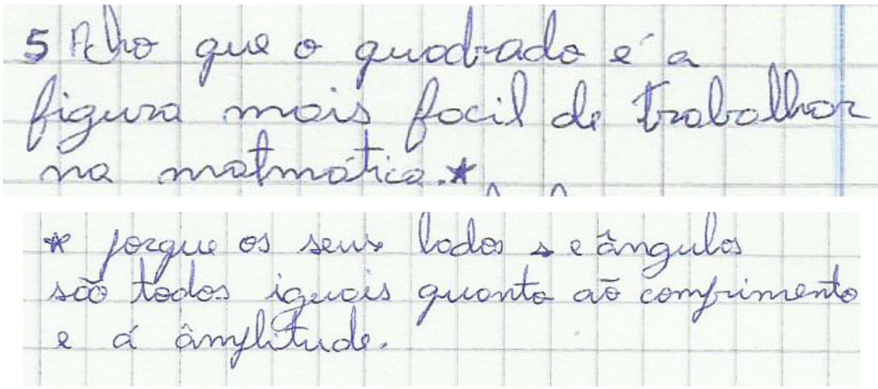

Figura 9. Uma das afirmações que a Glória apresentou na realização da Tarefa I.

Outra ideia matemática que Graça descreve sobre a existência de linhas paralelas e perpendiculares, foi afirmada e exemplificada por Glória (Figura 10).

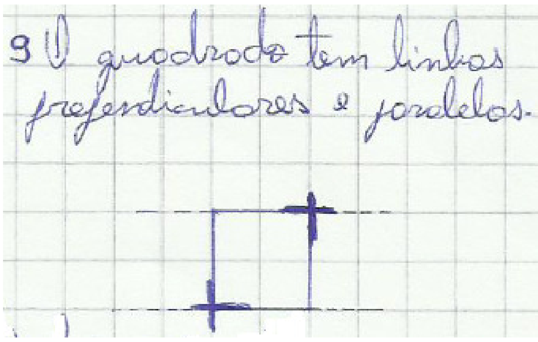

Figura 10. Excerto da resolução da Tarefa I da Glória.

Contudo, também Glória, tal como grande parte dos alunos da turma, faz referência a conexões com sólidos geométricos, referindo "se tivesse volume, ele calculava-se…". Tanto na Tarefa I, como na Tarefa II (ambas as questões), Glória centra os seus registos em descrições, recorrendo com bastante frequência à exemplificação, não apresentando, contudo, justificações, argumentações ou generalizações.

Considerações Finais

Nos três casos apresentados, podemos observar que o raciocínio matemático revelado com estas duas tarefas, é suportado principalmente, pela descrição de ideias matemáticas, muitas vezes sem a utilização de exemplos ou contraexemplos e, raramente, recorrendo à justificação ou argumentação. No entanto, a utilização de exemplos é mais frequente nos casos do Gil e da Glória, que estavam posicionados em níveis de van Hiele 1 e 2, respetivamente. Conclui-se que estes alunos eram capazes de descrever e enunciar propriedades ou definir uma ideia matemática, como o conceito de quadrado, através de diferentes e diversificadas propriedades e afirmações, mas que para eles não havia a necessidade de justificar ou argumentar a sua veracidade, sendo apenas suficiente a sua exemplificação.

Quanto ao raciocínio geométrico podemos concluir que os três alunos analisaram a figura em estudo, identificando algumas das suas propriedades, sem no entanto justificarem, conjeturarem e argumentarem as suas ideias. Além disso, também usaram a abordagem das transformações geométricas (rotações, translações e reflexões axiais) para analisarem o quadrado. No entanto parece-nos que o recurso a esta abordagem foi condicionado pelo facto destes conteúdos estarem a ser trabalhados nesse momento.

Referências

Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo* (5ª Edição). Lisboa: Edições 70, Lda.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.843–908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing; Reston, Va. National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NewYork: Macmillan.

Clements, D.H., Battista, M.T., & Sarama, J. (2001). Logo and Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph Series, Number 10. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (Sixth Edition). New York: Routledge.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani, (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph Series, Number 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gray, E., & Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, pp. 115-120, Norwich, UK.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*,*Vol. 1*, pp.3-19. Valencia, Spain: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to assess the acquisition of van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 237-251.

McCrone, S. M., King, J., Orihuela, Y. & Robinson, E. (2010). Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Geometry. Reston, VA: NCTM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Pandiscio, E., & Orton, R. E. (1998). Geometry and metacognition: An analysis of Piaget's and van Hiele's perspectives. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20* (2&3), 78-87.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York: Routledge.

Senk, S. L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 309-321.

Tall, D. (2004). Thinking through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 281–288, Bergen, Norway.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Orlando, FL: Academic Press. Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society, The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Yin, R. K. (2003). *Case study research – design and methods* (3rd Edition). Newbury Park: Sage Publications.